INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 29. Januar 1960

Postverlagsort Berlin

Preis DM 11.—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herrausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Bauersfeld, W., Die Bewegungsgesetze des Raumkompasses 365

Tameroğlu, S., Zur Membran- und Biegetheorie der Kreiszylinderschale für ein nichtlineares Elastizitätsgesetz 372

Kurata, M., Bending of Simply Supported Rectangular Plates With Clamped Portions Along Arbitrary Sections of the Edges 385

Müller, K.-H., Spannungen in anisotropen kreiszylindrischen Rohren 417

Rüdiger, D., Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper 421

INGENIEUR-ARCHIV

XXVII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1960

Die Bewegungsgesetze des Raumkompasses

Von W. Bauersfeld*

Richard Grammel zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Unter dem Raumkompaß ist eine von *Max Schuler* angegebene Variante des *Anschütz*schen Kreiselkompasses zu verstehen, die theoretisch gegen Beschleunigungen völlig unempfindlich ist.

Bei der nachfolgenden Behandlung dieses Kreiselkompasses werden ausgiebig Vektoren benutzt. Es zeigt sich dabei, daß man aus einfachen Ansätzen durch reine Vektorrechnung auf ganz kurzem Wege einen überraschenden Einblick in alle Bewegungsgesetze des Raumkompasses bekommt. Dabei werden nur die kleinen Drallwerte, die infolge langsamer Drehungen der Kreiselgehäuse entstehen, gegenüber dem Drall der Kreisel selbst vernachlässigt. Ferner werden die Drallachsen der Kreisel als mit ihren geometrischen Achsen zusammenfallend behandelt, wie es bei technischen Rechnungen mit schnellen Kreiseln zulässig und üblich ist.

2. Die Grundgleichungen. Die Konstruktion des Raumkompasses ist in Abb. 1 schematisch dargestellt. In einer völlig geschlossenen Schwimmkugel, mit der ein Dreibein $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ fest verbunden wird, sind zwei sehr schnelle Kreisel in zu $\mathfrak{a}_3$ parallelen Präzessionsachsen drehbar gelagert und durch Zahnräder so miteinander verbunden, daß ihre Drallachsen $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ mit der Richtung von $\mathfrak{a}_2$ gleiche Winkel einschließen.

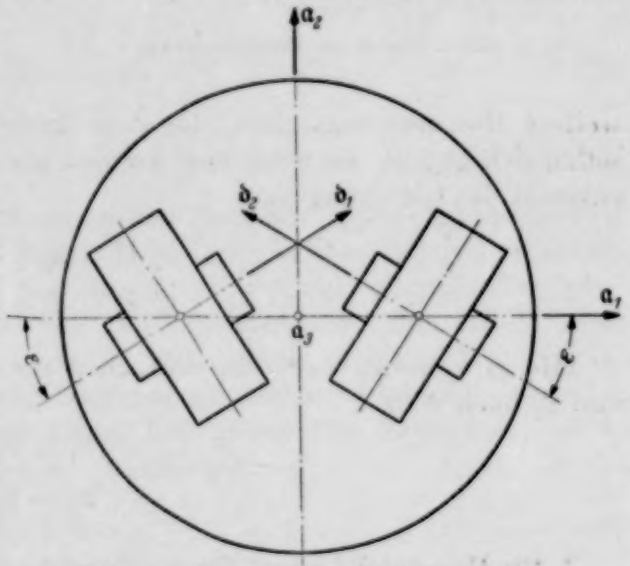


Abb. 1. Schematischer Aufbau des Kreiselkompasses.

Die Lage des Mittelpunktes der Schwimmkugel soll durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$, die ihres Schwerpunktes durch $\mathfrak{r}_s$ dargestellt werden. Zwischen beiden soll die Beziehung bestehen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_s + \mathfrak{a}_3\, a\,. \tag{1}$$

Der Schwerpunkt soll also in Richtung von $-\mathfrak{a}_3$ um die Strecke a gegenüber dem Kugelmittelpunkt verschoben sein.

Der Nullpunkt der Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_s$ soll der Mittelpunkt der Erde sein, die bei dieser Rechnung einfach als eine Kugel mit dem Radius r behandelt wird. Dabei sollen aber $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_s$ nicht als mit dem Erdkörper fest verbunden angesehen werden, sondern sie sollen auf einen drehungsfreien Raum bezogen werden, in dem die Richtungen nach den Fixsternen als zeitlich unveränderlich zu betrachten sind.

Zuerst soll der Schwerpunktsatz für das Gesamtsystem aufgestellt werden, dessen Masse mit m bezeichnet wird. Als äußere Kräfte kommen nur in Betracht das Gewicht $-(\mathfrak{r}/r)\, m\, g$ und eine Stützkraft $\mathfrak{R}$, die von dem allseitigen Flüssigkeitsdruck auf die Schwimmkugel herrührt, und die daher genau durch den Kugelmittelpunkt geht. Denn die Reibungskräfte, die bei den langsamen Drehungen der Kugel gegenüber der Schwimmflüssigkeit entstehen, können vernachlässigt werden. Damit liefert der Schwerpunktsatz die Gleichung

$$\ddot{\mathfrak{r}}_s\, m = \mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{r}}{r}\, m\, g$$

oder, in Verbindung mit (1),

$$\mathfrak{R} = \ddot{\mathfrak{r}}\, m - \ddot{\mathfrak{a}}_3\, a\, m + \frac{\mathfrak{r}}{r}\, m\, g\,. \tag{2}$$

* Gestorben am 28. Oktober 1959.

Weiter soll zunächst der Flächensatz auf das Gesamtsystem angewandt werden, mit dem Schwerpunkt $\mathfrak{r}_s$ als Bezugspunkt. In diesem Fall tritt als äußeres Kräftemoment nur das von der Stützkraft $\mathfrak{R}$ herrührende auf, mit dem Hebelarm $\mathfrak{a}_3\, a$. Der Gesamtdrall setzt sich aus den beiden Kreiseldrall-Werten $\mathfrak{d}_1 B$ und $\mathfrak{d}_2 B$ zusammen. Damit wird

$$(\dot{\mathfrak{d}}_1 + \dot{\mathfrak{d}}_2)\, B = a\, \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{R}$$

oder mit (2)

$$(\dot{\mathfrak{d}}_1 + \dot{\mathfrak{d}}_2)\, B = m\, a\, \mathfrak{a}_3 \times \left(\ddot{\mathfrak{r}} - \ddot{\mathfrak{a}}_3\, a + \mathfrak{r}\,\frac{g}{r}\right). \tag{3}$$

Schließlich soll noch der Flächensatz auf die beiden Kreisel einzeln angewandt werden. Die Gehäuse dieser Kreisel sind drehbar in zu $\mathfrak{a}_3$ parallelen Präzessionsachsen gelagert. Sieht man diese Lagerungen als reibungsfrei an, so können die Momente, die von den Lagerkräften herrühren, keine in die Richtung $\mathfrak{a}_3$ fallende Komponente aufweisen. Sie können also durch die Ausdrücke $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{L}_2$ dargestellt werden.

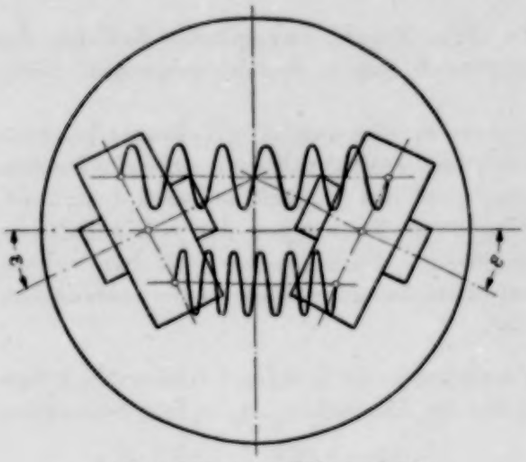


Abb. 2. Schema der Federanordnung.

Weitere Momente entstehen durch den Zahndruck zwischen den beiden Zahnrädern, die, wie schon gesagt wurde, die beiden Kreiselgehäuse so miteinander verbinden, daß ihre Ausschlagwinkel ε (Abb. 1) sich stets gleichen. Man erkennt leicht, daß die Vektoren, die diese Zahndruckmomente darstellen, einander gleich sein müssen, und daß sie auch die gleiche Richtung ($\mathfrak{a}_3$) aufweisen müssen. Sie können also in beiden Fällen durch $\mathfrak{a}_3\, Z$ dargestellt werden.

Schließlich soll noch vorausgesetzt werden, daß die beiden Gehäuse, die die Kreisel umschließen, durch Federn (Abb. 2) so miteinander verbunden sind, daß weitere Momente entstehen, die vom Ausschlagwinkel ε abhängig sind. Diese beiden Momente sollen sich gegenseitig aufheben, können also durch $-\mathfrak{a}_3\, F$ und $+\mathfrak{a}_3\, F$ dargestellt werden. Damit entsteht das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{d}}_1\, B &= \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{a}_3\, F + \mathfrak{a}_3\, Z\,, \\ \dot{\mathfrak{d}}_2\, B &= \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{a}_3\, F + \mathfrak{a}_3\, Z\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierzu kommen noch die einfachen geometrischen Beziehungen für die Einheitsvektoren $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ nach Abb. 1

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 &= 2\,\mathfrak{a}_2 \sin\varepsilon\,, \\ \mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 &= 2\,\mathfrak{a}_1 \cos\varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

3. Die Hauptgleichungen für die Bewegungsgesetze. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt sofort

$$(\dot{\mathfrak{d}}_1 + \dot{\mathfrak{d}}_2)\, B = 2\,\dot{\mathfrak{a}}_2\, B \sin\varepsilon + 2\,\mathfrak{a}_2\, B\,\dot{\varepsilon}\cos\varepsilon = \mathfrak{a}_3 \times (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) + 2\,\mathfrak{a}_3\, Z\,,$$
$$(\dot{\mathfrak{d}}_1 - \dot{\mathfrak{d}}_2)\, B = 2\,\dot{\mathfrak{a}}_1\, B\cos\varepsilon - 2\,\mathfrak{a}_1\, B\,\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon = \mathfrak{a}_3 \times (\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2) - 2\,\mathfrak{a}_3\, F\,.$$

Diese beiden Gleichungen werden jetzt skalar mit $\mathfrak{a}_3$ multipliziert. Da nach (3) $\mathfrak{a}_3 \cdot (\dot{\mathfrak{d}}_1 + \dot{\mathfrak{d}}_2)\, B = 0$ werden muß, so entsteht

$$0 = 2\,\dot{\mathfrak{a}}_2 \cdot \mathfrak{a}_3\, B \sin\varepsilon = 2\, Z$$

und

$$2\,\dot{\mathfrak{a}}_1 \cdot \mathfrak{a}_3\, B\cos\varepsilon = -2\, F\,.$$

Hiernach wird der Zahndruck Z zu null, und, da wegen $\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_3 = 0$ und $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_3 = 0$

$$\dot{\mathfrak{a}}_2 \cdot \mathfrak{a}_3 = -\,\mathfrak{a}_2 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{a}}_1 \cdot \mathfrak{a}_3 = -\,\mathfrak{a}_1 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_2$$

ist,

$$\mathfrak{a}_2 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_1 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 = \frac{F}{B\cos\varepsilon}\,.$$

Die Gültigkeit der ersten dieser Gleichungen ist an die Bedingung $\varepsilon > 0$, die der zweiten an $\varepsilon < \pi/2$ geknüpft. Nun ist aber, ganz allgemein,

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_2 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 + \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_3 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3\,,$$

und da wegen $\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{a}_3 = 1$ auch $\mathfrak{a}_3 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 = 0$ ist, so gelangt man sofort zu der ersten Hauptgleichung dieses Kreiselsystems

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_1\,\frac{F}{B\cos\varepsilon}\,. \tag{6}$$

Sie besagt, daß die $\mathfrak{a}_1$-Achse sich stets in die Richtung von $\dot{\mathfrak{a}}_3$ einstellt.

Die zweite gewinnt man nun auch sehr schnell. Nach (6) ist

$$\mathfrak{a}_3 \times \dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_2\,\frac{F}{B\cos\varepsilon}$$

und damit nach (5)

$$\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 = 2\,\mathfrak{a}_2 \sin\varepsilon = \mathfrak{a}_3 \times \dot{\mathfrak{a}}_3\,\frac{B\sin 2\varepsilon}{F}\,.$$

Die Einsetzung dieses Ausdrucks in (3) liefert

$$(\dot{\mathfrak{d}}_1 + \dot{\mathfrak{d}}_2)\,B = \mathfrak{a}_3 \times \ddot{\mathfrak{a}}_3\,\frac{B^2\sin 2\varepsilon}{F} + \mathfrak{a}_3 \times \dot{\mathfrak{a}}_3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{B^2\sin 2\varepsilon}{F}\right)$$

$$= m\,a\,\mathfrak{a}_3 \times \left(\ddot{\mathfrak{r}} - \ddot{\mathfrak{a}}_3\,a + \mathfrak{r}\,\frac{g}{r}\right)$$

oder, mit Einführung der Hilfsgröße

$$\varrho = \frac{B^2\sin 2\varepsilon}{F\,m\,a}\,, \tag{7}$$

$$\mathfrak{a}_3 \times \left\{\ddot{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\,\frac{g}{r} - \ddot{\mathfrak{a}}_3\,(\varrho + a) - \dot{\mathfrak{a}}_3\,\dot{\varrho}\right\} = 0\,. \tag{8}$$

Das ist die zweite Hauptgleichung.

4. Die *Schuler*sche Lösung. Die Gleichung (8) wird wesentlich einfacher, wenn die Hilfsgröße ϱ zu einer Konstanten wird. Dazu ist nur nötig, wie (7) zeigt, daß die Federkonstruktion zwischen den beiden Kreiselgehäusen so ausgeführt wird, daß das Moment F aus den Federkräften proportional $\sin 2\,\varepsilon$ wird. Die in Abb. 2 schematisch eingezeichnete Federkonstruktion erfüllt diese Forderung. Die beiden Federn sind völlig gleich und in der Stellung $\varepsilon = 0$ auch gleich gespannt.

Wenn man nun weiterhin die in (7) enthaltenen Konstruktionsdaten B, M, A und $F = \varkappa \sin 2\,\varepsilon$ so wählt, daß die Hilfsgröße ϱ, die die Dimension einer Länge hat, gleich dem Erdradius r wird, so läßt die Hauptgleichung (8), die in diesem Fall die Form annimmt[1]

$$\mathfrak{a}_3 \times \left(\ddot{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\,\frac{g}{r} - \ddot{\mathfrak{a}}_3\,r\right) = 0\,, \tag{9}$$

eine überraschend einfache Lösung zu. Sie wird nämlich mit dem Ansatz

$$\mathfrak{a}_3 = \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{9a}$$

identisch erfüllt. Das bedeutet: Wenn die Achse $\mathfrak{a}_3$ zu Anfang genau die Richtung von $\mathfrak{r}$ hat, also die durch den Erdmittelpunkt bestimmte Richtung, so behält sie diese bei beliebigen horizontalen Geschwindigkeiten $\dot{\mathfrak{r}}$ und Beschleunigungen $\ddot{\mathfrak{r}}$ starr bei. Zu solchen horizontalen Geschwindigkeiten $\dot{\mathfrak{r}}$ gehört auch die durch die Erddrehung bedingte.

Diese überraschende Lösung des Kreiselkompaßproblems stammt von *Max Schuler*. Der Weg, den er hierfür beschreiten mußte, war sehr viel mühsamer als der vorstehend benutzte, der relativ leicht zu finden war, weil das Ziel festlag. Die Bezeichnung „Raumkompaß" ist für dieses System von der Firma Anschütz in Kiel eingeführt worden, bei der *Schuler* damals als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig war.

[1] Der Schwerpunktsabstand a, der nur die Größenordnung von Zentimetern hat, fällt natürlich in Gl. (8) gegenüber der Länge $\varrho = r$ ganz heraus.

Mit dem Ansatz (9a) scheint zunächst die *Schuler*-Lösung auf horizontale Geschwindigkeiten beschränkt zu sein, mit $\dot{\mathfrak{r}}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$. Denn nur für solche bleibt $\mathfrak{r}/r$ ein Einheitsvektor, da r als ein fester Wert für den Erdradius eingeführt worden war. Diese Beschränkung besteht aber praktisch nicht, wie später gezeigt werden soll.

5. Lotanzeige und Nordweisung. Der Raumkompaß stellt theoretisch ein ideales Gerät für die Lotanzeige auf einem schwankenden Schiff dar, weil seine $\mathfrak{a}_3$-Achse ständig nach dem Erdmittelpunkt ausgerichtet bleibt. Die Anzeige der Nordrichtung geht aus der ersten Hauptgleichung hervor. Diese Gleichung (6) besagt, daß die Richtung der Kugelachse $\mathfrak{a}_1$ stets mit der von $\dot{\mathfrak{a}}_3$ zusammenfällt. Führt man den Einheitsvektor $\mathfrak{p}$ für die Richtung der Erdachse ein, so wird $\dot{\mathfrak{a}}_3$ für den auf der Erde fest aufgestellten Raumkompaß dargestellt durch

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{p} \times \mathfrak{a}_3 \, \omega_0 \tag{10}$$

mit $\omega_0 = 7.29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}$ für die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Daher wird

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_1 \, \omega_0 \cos \varphi_0 \,, \tag{10a}$$

wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{r}/r$ mit $(\pi/2 - \varphi_0)$ bezeichnet wird. Damit kennzeichnet φ_0 die geometrische Polhöhe, die wegen der Zentrifugalbeschleunigung der Erde etwas kleiner ist als die physikalische Polhöhe φ, die wir auf der Erde messen. Der Unterschied zwischen beiden beträgt, wie man leicht feststellen kann, nur

$$\frac{r}{2\,g}\,\omega_0^2 \sin 2\,\varphi = 5.94 \sin 2\,\varphi \quad \text{in Winkelminuten.}$$

Da die Richtung der Achse $\mathfrak{a}_1$ identisch mit der von $\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}_3$ ist, fällt sie genau nach Osten, und daher die von $\mathfrak{a}_2$ genau nach Norden, mit dem kleinen eben angegebenen Winkel als Erhebung oder „Elevation" über den Horizont.

Auf dem fahrenden Schiff erfährt $\dot{\mathfrak{r}}$ eine von der Kursrichtung und der Schiffsgeschwindigkeit abhängige Richtungsänderung, der natürlich auch $\dot{\mathfrak{a}}_3$ unterliegt, und die eine als „Fahrtfehler" bekannte Fehlweisung von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hervorruft.

Aus der ersten Hauptgleichung (6) gewinnt man weiter den Winkel ε, der sich im Raumkompaß einstellt. Nach (7) wird ja für $\varrho = r$ das Federmoment

$$F = \frac{B^2}{m\,a\,r} \sin 2\,\varepsilon \,. \tag{11}$$

Steht nun der Raumkompaß fest auf der umlaufenden Erde, so wird nach den Gleichungen (10a) und (6)

$$\omega_0 \cos \varphi_0 = \frac{F}{B \cos \varepsilon} \,,$$

und daher in Verbindung mit (11)

$$\sin \varepsilon = \frac{m\,a\,r\,\omega_0 \cos \varphi_0}{2\,B} \,. \tag{11a}$$

Diese Gleichung ist für die Konstruktion des Raumkompasses äußerst wichtig. Denn ε darf ja den Wert $\pi/2$ nicht erreichen. Führt man noch den Winkel ε_0 ein, der sich nach (11a) am Äquator ($\varphi_0 = 0$) einstellt, so gilt

$$2\,B \sin \varepsilon_0 = m\,a\,r\,\omega_0 \,. \tag{11b}$$

Man ersieht hieraus, wie man durch passende Wahl des Schwerpunktsabstandes a den Winkel ε_0 konstruktiv festlegen kann. Mit diesem läßt sich die erste Hauptgleichung (6) auf die einfache Form bringen

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_1 \, \omega_0 \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_0} \,. \tag{12}$$

6. Die Eigenschwingungen des Systems. Die Gleichung (9), die für den Raumkompaß die zweite Hauptgleichung darstellt, gibt nun auch Aufschluß über die Eigenschwingungen des Systems. Mit dem Ansatz (9a) wurde ja nur eine singuläre Lösung gewonnen.

Die möglichen Bewegungen, die Gleichung (9) darstellt, lassen sich am einfachsten übersehen, wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Bewegungsgleichung des Fadenpendels vergleicht.

Um diese aufzustellen, soll die Pendellänge mit l bezeichnet werden, die Masse des kleinen Pendelkörpers mit m. Ferner wird zur Bestimmung der Lage des Aufhängepunktes der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und für den Schwerpunkt des Pendelkörpers der Ortsvektor $\mathfrak{r}_s$ eingeführt, wobei $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_s$ in genau der gleichen Weise wie bisher auf den Erdmittelpunkt bezogen werden. Die Richtung des Fadens soll durch den Einheitsvektor $\mathfrak{a}_3$ bestimmt werden (Abb. 3). Daher ist

$$\mathfrak{r}_s = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}_3 l . \tag{13}$$

Die Kräfte, die am Pendelkörper angreifen, sind die Gewichtskraft $-(\mathfrak{r}/r)\, m g$ und die Zugkraft des Fadens, die mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden soll. Nach dem Schwerpunktsatz wird daher

$$\ddot{\mathfrak{r}}_s m = \mathfrak{K} - \frac{\mathfrak{r}}{r} m g .$$

In Verbindung mit (13) ergibt sich daraus

$$\mathfrak{K} = m\left(\ddot{\mathfrak{r}} - \ddot{\mathfrak{a}}_3 l + \mathfrak{r}\frac{g}{r}\right)$$

oder, da $\mathfrak{K}$ die gleiche Richtung wie $\mathfrak{a}_3$ hat,

$$\mathfrak{a}_3 \times \left(\ddot{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\frac{g}{r} - \ddot{\mathfrak{a}}_3 l\right) = 0 . \tag{14}$$

Abb. 3. Schema des einfachen Fadenpendels.

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (9) des Raumkompasses völlig überein mit der einzigen Abweichung, daß in dieser als Faktor von $\ddot{\mathfrak{a}}_3$ der Erdradius r anstelle der kurzen Pendellänge l auftritt.

Daraus ist zu schließen, daß der Raumkompaß um seinen Stützpunkt ($\mathfrak{r}$) mit seinem Schwerpunkt ($\mathfrak{r}_s$) ganz gleichartige Bewegungen auszuführen vermag wie das einfache Fadenpendel, nämlich ebene Schwingungen, Kreisbewegungen und ellipsenartige Schwingungen. Aber diese Bewegungen verlaufen außerordentlich viel langsamer als beim Fadenpendel. Während das Fadenpendel bei kleinen Ausschlägen die aus (14) hervorgehende bekannte Schwingungsdauer

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{14a}$$

von der Größenordnung von nur wenigen Sekunden hat, wird sie analog beim Raumkompaß zu

$$T_R = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 84{,}4 \text{ Minuten.} \tag{14b}$$

Die Bewegungen des Raumkompasses verlaufen hiernach im Verhältnis 1:2500 langsamer als die eines Fadenpendels von 1 m Länge.

Aus dieser Analogie erkennt man, daß der Raumkompaß auch gegen vertikale Beschleunigungen unempfindlich ist. Denn ein ruhendes Fadenpendel kann man nicht durch Auf- und Abbewegen seines Aufhängepunktes zum Schwingen bringen. Nur dann, wenn es schon anfangs hin- und herpendelt, kann man die Schwingungen steigern, falls man bei der Auf- und Abbewegung einen bestimmten Rhythmus innehält. Da der Raumkompaß aber durch horizontale Beschleunigungen nicht aus der Ruhelage herausgebracht werden kann, müssen auch vertikale Beschleunigungen wirkungslos bleiben.

Nun entsteht weiter die Frage: Wie verhalten sich die Achsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der Kreiselkugel sowie der Winkel ε, falls die $\mathfrak{a}_3$-Achse wie ein Pendel schwingt? Darüber gibt die erste Hauptgleichung (6) Auskunft. Diese Gleichung war bereits mit dem Federgesetz des Raumkompasses auf die Form (12) gebracht worden. Sie besagt zunächst, daß die Kugelachse $\mathfrak{a}_1$ in jedem Zeitpunkt die gleiche Richtung wie $\dot{\mathfrak{a}}_3$ hat. Wenn also z. B. bei der Aufstellung des Raumkompasses am Nordpol diesem eine solche Schwingung aufgeprägt würde, daß die Pfeilspitze von $\mathfrak{a}_3$ eine Kreisbahn um die Polachse beschreibt, so hat nach (15) die Achse $\mathfrak{a}_1$ der Kompaßkugel in jedem Zeitpunkt die Richtung der Tangente an diese Kreisbahn. Die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der diese Bahn durchlaufen wird, ist durch die Umlaufzeit von 84,4 Minuten nach (14b) aus $\omega\, T_R = 2\pi$ mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0.00124\,\mathrm{s}^{-1} \tag{15}$$

festgelegt, falls der Winkel ν zwischen $\mathfrak{a}_3$ und der Polrichtung $\mathfrak{p}$ klein ist. Daher wird aus (12) in diesem Fall

$$\dot{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{p} \times \mathfrak{a}_3 \omega = \mathfrak{a}_1 \omega_0 \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon_0}$$

und daraus weiter

$$\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 \sin \nu$$

und

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \sin \nu = 17 \sin \nu \,. \tag{15a}$$

Denn mit der Erddrehgeschwindigkeit $\omega_0 = 7.29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ und ω nach (15) wird ω/ω_0 fast genau gleich 17.

Diese Gleichung zeigt, daß schon für $\sin \nu = 1/17$, d. h. für $\nu = 3{,}^{\circ}37$ der Winkel ε, der sich im Raumkompaß bei der beschriebenen Umkreisung der Polachse einstellt, den vollen Wert ε_0 erreicht, den der Raumkompaß bei erdfester und schwingungsfreier Aufstellung am Äquator aufweist.

Wird dem Raumkompaß bei der Aufstellung auf dem Nordpol eine ebene Pendelschwingung aufgeprägt, so verbleibt $\dot{\mathfrak{a}}_3$ und damit $\mathfrak{a}_1$ in der Schwingungsebene, die für den auf der Erde stehenden Beobachter die *Foucault*sche Drehung zeigt, die am Pol mit der negativen Erddrehgeschwindigkeit vor sich geht. Aber der Absolutwert $|\dot{\mathfrak{a}}_3|$ bleibt nicht mehr konstant wie bei der eben betrachteten Kreisschwingung, sondern schwankt zwischen dem Wert Null in den Umkehrpunkten und einem Maximalwert beim Durchgang durch die Mittellage. Dieser Wert $|\dot{\mathfrak{a}}_3|$ ist beim ebenen Pendel identisch mit $\dot{\nu}$, wenn ν den Ausschlagwinkel des Pendels bezeichnet (Abb. 3). Ist die Amplitude ν_0 dieses Ausschlagwinkels sehr klein, so ist bekanntlich das Bewegungsgesetz für das Pendel

$$\nu = \nu_0 \sin \omega\, t \,,$$

wobei ω durch $\omega\, T = 2\,\pi$ mit der Schwingungsdauer T zusammenhängt. Da diese Formel auch für den Raumkompaß gelten muß, der ja gleichartige Schwingungen ausführen kann, so wird nach (12)

$$|\dot{\mathfrak{a}}_3| = \dot{\nu} = \nu_0\, \omega \cos \omega\, t = \omega_0 \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_0} \tag{15b}$$

oder

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_0} = \nu_0 \frac{\omega}{\omega_0} \cos \omega\, t = 17\, \nu_0 \cos \omega\, t \,. \tag{15c}$$

Der Winkel ε ändert sich hiernach periodisch. Er wird Null für $\nu = \nu_0\,(\omega\, t = \pi/2)$, d. h. für die Umkehrpunkte der Pendelschwingung. Die Amplitude von $\sin \varepsilon$ ist im Verhältnis von $17 \sin \varepsilon_0 = 1$ größer als die Amplitude ν_0 des Pendelausschlags. Mit der Umkehr der Pendelbewegung ändert ε zugleich mit $\dot{\mathfrak{a}}_3$ der Gleichung (12) entsprechend das Vorzeichen. Die Drallachsen $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ (Abb. 1) schlagen nach der Seite negativer ε durch. Dieser Vorgang setzt aber eine genau ebene Pendelschwingung voraus. Bei der kleinsten Abweichung wird die Bahn zu einer langgestreckten Ellipse, $\dot{\mathfrak{a}}_3$ erreicht nicht mehr ganz den Wert Null, die $\mathfrak{a}_1$-Achse muß tangential der elliptischen Bahn folgen. Daher muß an den Umkehrstellen $\mathfrak{a}_1$ und damit der ganze Kugelkörper des Raumkompasses in verhältnismäßig kurzer Zeit um nahezu 180° herumschwenken, wobei ziemlich große Lagermomente an den Präzessionsachsen auftreten müssen. Für den Grenzübergang von der gestreckten Ellipse zur Doppelgeraden können die abgeleiteten Gleichungen keine zuverlässige Lösung geben, weil hierbei ε den Wert Null erreicht, der bei der Ableitung der Gleichungen auszuschließen war. Der Nebendrallwert der Kompaßkugel mit den Kreiselgehäusen ist in diesem Fall nicht mehr zu vernachlässigen.

Bei Aufstellung des Raumkompasses an einem beliebigen Ort der Erde sind natürlich ebenfalls Schwingungen wie bei einem Pendel denkbar. Auch in diesem Fall gilt die Gleichung (12). Aber der Vektor $\dot{\mathfrak{a}}_3$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, von denen der Hauptanteil jetzt durch die Erddrehung bedingt ist. Wenn die Eigenschwingung angenähert eben ist und in die Ost–West-Richtung fällt, d. h. in die Richtung des Erddrehungsanteils von $\dot{\mathfrak{a}}_3$, so hat sie keinen Einfluß auf die Nordanzeige des Kompasses, wie man leicht erkennen kann. Aber eine Schwingung in Nord–Süd-Richtung würde auch bei sehr kleinen Amplituden der $\mathfrak{a}_3$-Achse schon erhebliche Ausschläge für $\mathfrak{a}_1$ und damit auch für die Nordanzeige $\mathfrak{a}_2$ geben. Denn für den Schwingungsanteil von $\dot{\mathfrak{a}}_3$ ist ja nach (15b)

$$|\dot{\mathfrak{a}}_3|_{Schw} = \nu_0\, \omega \cos \omega\, t \,,$$

während der durch die Erddrehung bedingte Anteil nach (10a)

$$|\dot{\mathfrak{a}}_3|_{Erddr.} = \omega_0 \cos \varphi_0$$

ist. Da ω den 17fachen Wert von ω_0 hat, wird daher in diesem Fall der Ausschlagwinkel α der Nordweisungsachse $\mathfrak{a}_2$ in roher Überschlagsrechnung durch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0\,\omega\cos\omega t}{\omega_0\cos\varphi_0} = \frac{17\,v_0}{\cos\varphi_0}\cos\omega t$$

gegeben. Der Ausschlagwinkel α wird also etwa im Verhältnis von $17:\cos\varphi_0$ größer als die Amplitude v_0 der Pendelschwingung des Raumkompasses. Natürlich treten dazu noch ε-Schwingungen gemäß (12) auf.

Der Einfluß der *Foucault*schen Drehung der Schwingungsebene wurde bei dieser Überschlagsrechnung ganz unterdrückt. Tatsächlich ist er durchaus beachtlich. Denn wenn die Schwingungsebene zur Zeit $t = 0$ genau in die Meridianebene fällt, so ist sie nach Vollendung einer vollen Schwingung, d. h. für $t = 2\pi/\omega$ bereits um den Winkel $t\,\omega_0 \sin\varphi = 2\pi(\omega_0/\omega)\sin\varphi = (2\pi/17)\sin\varphi$ oder $(360°/17)\sin\varphi$ gedreht, d. h. für $\varphi = 45°$ um 15°. In (9) ist natürlich auch die *Foucault*-Drehung enthalten. Aber die strenge Berechnung der Schwingungen aus den Gleichungen (9) und (12) wird sehr kompliziert, auch wenn man sie auf sehr kleine Ausschläge der $\mathfrak{a}_3$-Achse beschränkt.

7. Schlußbetrachtung. Die vorangehenden Untersuchungen haben gezeigt, daß der Raumkompaß gegen Beschleunigungen völlig unempfindlich ist. Seine Vertikalachse ($\mathfrak{a}_3$) behält ihre Richtung zum Erdmittelpunkt bei beliebigen Bewegungen des Fahrzeugs, das ihn trägt, unverändert bei, und seine horizontale Drallachse $\mathfrak{a}_2$ zeigt dabei genau nach Norden, wenn der Raumkompaß auf der Erde feststeht. Im andern Fall stellt sich die als Fahrtfehler bekannte Abweichung schwingungsfrei ein.

Aber man muß beachten, daß der Raumkompaß ein Pendel von 84,4 Minuten Schwingungsdauer darstellt, und daß er deshalb vor allen Momenten geschützt werden muß, die Schwingungen anregen könnten. Diese Vorsorge gilt insbesondere für den Anlaufvorgang. Wie gezeigt wurde, reagiert der Raumkompaß auch bei sehr kleinen Schwingungen seiner Vertikalachse mit beachtlichen Ausschlägen der Nordweisungsachse und der Drallachsen beider Kreisel.

(Eingegangen am 23. März 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walther Bauersfeld*, Heidenheim/Brenz, Georg-Beutler-Straße 9.

Zur Membran- und Biegetheorie der Kreiszylinderschale für ein nichtlineares Elastizitätsgesetz

Von S. Tameroğlu

1. Einleitung. In dieser Arbeit soll ein nichtlineares Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen in der von *H. Kauderer*[1] angegebenen Form auf einige Schalenprobleme angewandt werden.

Zuerst stellen wir das Elastizitätsgesetz in dem für Umdrehungsschalen üblichen Koordinatensystem dar (Ziff. 2) und leiten sodann die Gleichungen her, mit deren Hilfe die Verzerrungen und die Verschiebungskomponenten bei Membranschalen zu berechnen sind, wenn das statisch bestimmte Problem der Spannungsermittlung gelöst ist (Ziff. 3). Nun wenden wir uns dem Problem der biegesteifen Kreiszylinderschale zu und stellen die für drehsymmetrische Belastung maßgebende nichtlineare Differentialgleichung für die radiale Verschiebungskomponente auf (Ziff. 4). Die Lösung dieser Differentialgleichung gelingt nur näherungsweise mit Hilfe eines Verfahrens der Störungsrechnung. Es werden die allgemeinen Formeln hergeleitet, die man zur Anwendung dieses Verfahrens benötigt (Ziff. 5). Schließlich wird für den Fall eines biegesteifen kreiszylindrischen Behälters mit eingespanntem Mantelfuß gezeigt, wie man bei der Anwendung dieser Formeln vorzugehen hat (Ziff. 6).

2. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen. Wir benützen die für eine Umdrehungsschale üblichen Winkelkoordinaten φ und ϑ (Abb. 1) und ergänzen diese durch eine zur Schalenmittelfläche normale z-Koordinate zu einem orthogonalen (φ, ϑ, z)-System, in welchem die Spannungs- und die Verformungsgrößen dargestellt werden sollen. Die nichtlinearen Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verzerrungen lauten dann allgemein

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_\vartheta &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_\vartheta - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,, \\ \tau_{\varphi\vartheta} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi\vartheta}\,, \quad \tau_{\varphi z} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi z}\,, \quad \tau_{\vartheta z} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\vartheta z}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z}{3} = \frac{\sigma_0\,k(s_0)}{3\,K}\,, \\ \psi_0^2 &= \frac{2}{3}\{2\,[(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_\vartheta - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0)^2] + \psi_{\varphi\vartheta}^2 + \psi_{\varphi z}^2 + \psi_{\vartheta z}^2\} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

gesetzt ist.

Hierbei bedeuten die Konstanten $K = E/3\,(1 - 2\,\nu_0)$ den Kompressionsmodul und G den Schubmodul. Die Größen ε_0 und ψ_0^2 sind Invarianten der Volumendehnung und des Tensors der volumentreuen Gestaltsänderung. Die Dehnungsfunktion $\varkappa(\varepsilon_0)$ und die Scherungsfunktion $\gamma(\psi^2)$ setzen wir als Potenzreihen in diesen Invarianten in der Form an:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1\,\varepsilon_0 + \varkappa_2\,\varepsilon_0^2 + \varkappa_3\,\varepsilon_0^3 + \cdots\,, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2 \cdot \psi_0^2 + \gamma_4 \cdot \gamma_0^4 + \gamma_6\,\gamma_0^6 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Man kann die Gleichungen (2.1) umkehren und erhält so

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_\varphi - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_\vartheta - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_z - \sigma_0)\,, \\ \psi_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{\varphi\vartheta}\,, \quad \psi_{\varphi z} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{\varphi z}\,, \quad \psi_{\vartheta z} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{\vartheta z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

[1] *H. Kauderer*, Nichtlineare Mechanik S. 14, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Die in (2.4) auftretenden Größen s_0 und t_0 sind dimensionslose Spannungsgrößen, die man durch die Spannungsinvarianten σ_0 und τ_0 gemäß den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta + \sigma_z}{3} = 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\cdot\varepsilon_0\,, \qquad s_0 = \frac{\sigma_0}{3\,K}\,, \qquad t_0 = \frac{\tau_0}{G}\,, \\ \tau_0^2 &= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[(\sigma_\varphi-\sigma_0)^2 + (\sigma_\vartheta-\sigma_0)^2 + (\sigma_z-\sigma_0)^2\right] + \tau_{\varphi\vartheta}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{\vartheta z}^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

zu bestimmen hat. Die Kompressionsfunktion $k(s_0)$ und die Schubfunktion $g(t_0^2)$ sollen sich als Potenzreihen in den Spannungsgrößen s_0 und t_0^2 in der Form

$$\left.\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1\cdot s_0 + k_2\,s_0^2 + k_3\,s_0^3 + \cdots, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2\cdot t_0^2 + g_4\cdot t_0^4 + g_6\cdot t_0^6 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

darstellen lassen.

Für zusammengehörige Werte von ψ_0^2 und t_0^2 bzw. von ε_0 und s_0 gelten zwischen den Funktionen $\gamma(\psi_0^2)$ und $g(t_0^2)$ bzw. $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $k(s_0)$ die Gleichungen

$$\frac{1}{\gamma(\psi_0^2)} = g(t_0^2)\,, \qquad \frac{1}{\varkappa(\varepsilon_0)} = k(s_0)\,. \tag{2.7}$$

Die Koeffizienten $\varkappa i$ und γ_i bzw. k_i und g_i, die in den Potenzreihen (2.3) bzw. (2.6) auftreten, sind zusammen mit den Moduln K und G durch geeignete Grundversuche experimentell zu bestimmen.

3. Die Spannungs–Dehnungs-Gleichungen für $\sigma_z = 0$ und ihre Anwendung auf die Membrantheorie der Umdrehungsschalen. Setzen wir die Spannung σ_z senkrecht zur Mittelfläche gleich Null, so folgt aus (2.5)

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta}{9\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)} \tag{3.1}$$

und somit aus dem ersten beiden Gleichungen (2.1)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{1}{3}(\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta) + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\left[\varepsilon_\varphi - \frac{\sigma_\varphi+\sigma_\vartheta}{9\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)}\right], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{1}{3}(\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta) + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\left[\varepsilon_\vartheta - \frac{\sigma_\varphi+\sigma_\vartheta}{9\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)}\right], \\ \tau_{\varphi\vartheta} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi\vartheta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Führen wir noch die Abkürzung[1]

$$\nu(\varepsilon_0, \psi_0^2) = \frac{1}{2}\,\frac{3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0) - 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)}{3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0) + G\,\gamma(\psi_0^2)} \tag{3.3}$$

ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,[\varepsilon_\varphi + \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\varepsilon_\vartheta], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,[\varepsilon_\vartheta + \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\varepsilon_\varphi], \\ \tau_{\varphi\vartheta} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{\varphi\vartheta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Die Gleichungen (3.4) können wir nach den Verzerrungen auflösen; dies gibt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{1+\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\left[\frac{\sigma_\varphi - \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\sigma_\vartheta}{2\,G\,\gamma(\psi_0^2)}\right], \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{1+\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\left[\frac{\sigma_\vartheta - \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\sigma_\varphi}{2\,G\,\gamma(\psi_0^2)}\right], \\ \psi_{\varphi\vartheta} &= \frac{\tau_{\varphi\vartheta}}{G\,\gamma(\psi_0^2)} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

[1] *H. Kauderer*, a. a. O. S. 144.

Schreiben wir mit Rücksicht auf (2.7) die Abkürzung (3.3) in der Form

$$\nu(s_0, t_0^2) = \frac{1}{2} \frac{3\,K\,g(t_0^2) - 2\,G\,k(s_0)}{3\,K\,g(t_0^2) + G\,k(s_0)} \tag{3.6}$$

und gehen hiermit in die Gleichungen (3.5) ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{1+\nu(s_0,t_0^2)}\left[\frac{\sigma_\varphi - \nu(s_0,t_0^2)\,\sigma_\vartheta}{2\,G}\,g(t_0^2)\right], \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{1+\nu(s_0,t_0^2)}\left[\frac{\sigma_\vartheta - \nu(s_0,t_0^2)\,\sigma_\varphi}{2\,G}\,g(t_0^2)\right], \\ \psi_{\varphi\vartheta} &= \frac{\tau_{\varphi\vartheta}}{G}\,g(t_0^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich für eine Umdrehungsschale die Verzerrungen nach dem hier zugrundegelegten nichtlinearen Elastizitätsgesetz aus den Spannungen berechnen. Wir wenden nun diese Gleichungen auf die Membrantheorie der Umdrehungsschalen an.

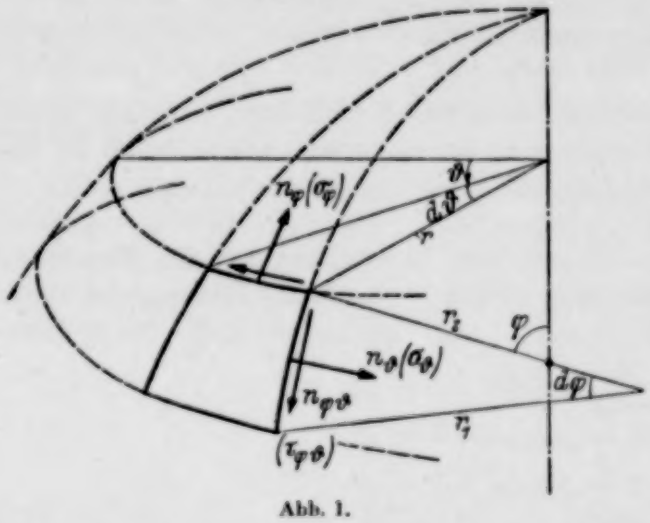


Abb. 1.

Nehmen wir — wie in der linearen Theorie — an, daß beim Membranspannungszustand allein die drei über die Plattendicke konstanten Spannungen σ_φ, σ_ϑ und $\tau_{\varphi\vartheta}$ auftreten, so ist, da wir ja auch weiterhin kleine Verzerrungen voraussetzen, das Problem der Membranschale nach wie vor statisch bestimmt, und die Spannungen in der Membranschale bleiben demnach dieselben wie bei einem linearen Elastizitätsgesetz. Die Verzerrungen und die sich aus ihnen ergebenden Verschiebungskomponenten u, v, w sind jedoch jetzt auf Grund der nichtlinearen Beziehungen (3.7) zu berechnen.

Als erstes Beispiel behandeln wir die drehsymmetrische Belastung und Verformung einer Umdrehungsschale. Bezeichnen wir die Verschiebungskomponenten in der Richtung des Breitenkreises mit u, in der Richtung des Meridians mit v und in der zur Schalenmittelfläche senkrechten Richtung mit w, so ist hier u gleich Null zu setzen, und es wird[1]

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\mathrm{ctg}\,\varphi = r_1\,\varepsilon_\varphi - r_2\,\varepsilon_\vartheta \equiv q(\varphi)\,, \qquad w = r_2 \cdot \varepsilon_\vartheta - v\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,. \tag{3.8}$$

Hierbei ist r_1 der Krümmungshalbmesser des Meridians und $r = r_2 \sin\varphi$ der Krümmungshalbmesser des Breitenkreises. Geht man mit ε_φ und ε_ϑ, die jetzt nur von φ abhängen, aus (3.7) in die erste der Gleichungen (3.8) ein, so enthält diese nur noch φ als unabhängige Veränderliche und läßt sich somit integrieren. Hiermit ist dann auch w aus der zweiten Gleichung (3.8) berechenbar.

Für den Sonderfall der Kugelschale ist $r_1 = r_2 = a$. Der Ausdruck $q(\varphi)$ wird dann unabhängig von $\nu(s_0, t_0^2)$.

Bei der antimetrischen Belastung (z. B. Windbelastung) hat man von den allgemeinen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial\varphi} + w &= r_1\,\varepsilon_\varphi\,, \\ \frac{\partial u}{\partial\vartheta} + v\cos\varphi + w\sin\varphi &= r_2\,\varepsilon_\vartheta \sin\varphi\,, \\ \frac{r_2}{r_1}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi - u\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial\vartheta} &= r_2\,\psi_{\varphi\vartheta}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

zwischen den Verzerrungen ε_φ, ε_ϑ und $\psi_{\varphi\vartheta}$ und den Verschiebungskomponenten u, v, w auszugehen, in denen jetzt φ und ϑ als unabhängige Veränderliche auftreten. Man integriert diese Differentialgleichungen wie im linearen Fall mit Hilfe *Fourier*scher Reihenentwicklungen.

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen S. 79, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Kreiszylinderschale. Wir benutzen jetzt statt ϑ die Koordinate x (in Achsrichtung) und erhalten so anstelle von (3.7) die Spannungs–Dehnungs-Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{1+\nu(s_0,t_0^2)}\left[\frac{\sigma_x-\nu(s_0,t_0^2)\,\sigma_\varphi}{2\,G}\,g(t_0^2)\right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{1+\nu(s_0,t_0^2)}\left[\frac{\sigma_\varphi-\nu(s_0,t_0^2)\,\sigma_x}{2\,G}\,g(t_0^2)\right], \\ \psi_{x\varphi} &= \frac{\tau_{x\varphi}}{G}\,g(t_0^2) \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

Auch hier ist das Vorgehen grundsätzlich dasselbe wie bei linearem Elastizitätsgesetz.

4. Die Differentialgleichung der biegesteifen Kreiszylinderschale. Wir wenden uns nun dem Problem der biegesteifen Kreiszylinderschale zu, die durch gleichmäßig verteilte Randkräfte oder Randmomente beansprucht ist. Im Hinblick auf eine spätere Anwendung wollen wir vorerst einmal annehmen, es liege der Mantel eines Behälters von konstanter Wandstärke $2\,h$ und dem mittleren Halbmesser a vor (Abb. 2), der bis zum Rand mit einer Flüssigkeit vom Raumgewicht ϱ gefüllt sei[1].

Könnte sich der Behältermantel unbehindert verformen, so entstünde in ihm ein Membranspannungszustand mit den Schnittkräften

$$n_\varphi = \varrho\,a\,(l-x)\,, \qquad n_x = 0\,.$$

Da die Mantelverformung durch anschließende Bauteile behindert ist, so wird der Membranspannungszustand gestört, und es treten — mit Rücksicht auf die Drehsymmetrie — neben den Schnittkräften n_x und n_φ die Biegemomente m_x und m_φ sowie die Querkräfte q_x auf. Die Biegemomente m_φ sind vernachlässigbar klein.

Für das in Abb. 2 schraffierte Element von der Höhe dx und der Breite $a\,d\varphi$ lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte in radialer Richtung und die Momente bezüglich der Ringtangente

$$\left.\begin{aligned} n_\varphi\,d\varphi\,dx + dq_x\,a\,d\varphi - \varrho\,a\,(l-x)\,d\varphi\,dx = 0\,, \\ (q_x\,dx - dm_x)\,a\cdot d\varphi = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\frac{dq_x}{dx} = \frac{d^2m_x}{dx^2}$$

und somit liefert die erste Gleichung (4.1) die Beziehung

$$\frac{d^2m_x}{dx^2} + \frac{1}{a}\,n_\varphi = \varrho\,(l-x)\,. \qquad (4.2)$$

Hierbei sind n_φ und m_x durch die Integrale

$$n_\varphi = \int_{-h}^{+h}\sigma_\varphi\cdot dz\,, \qquad m_x = -\int_{-h}^{+h}\sigma_x\left(1+\frac{z}{a}\right)z\,dz \qquad (4.3)$$

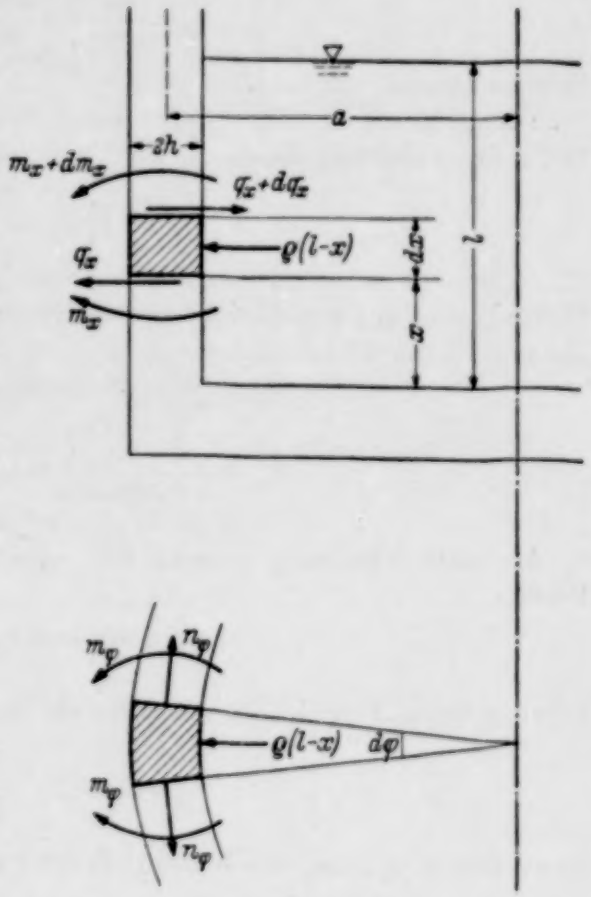


Abb. 2.

zu berechnen. Mit z ist der Abstand des Schalenpunktes von der Mittelfläche bezeichnet. Die Spannungen σ_φ und σ_x folgen aus den Gleichungen (3.4), in denen der Index ϑ durch x zu ersetzen ist. Die Berechnung der Schnittkraft n_φ erfordert die Kenntnis der Spannung σ_φ. Würden wir $n_x = 0$ setzen, so würde aus der zweiten Gleichung (3.4)

$$\varepsilon_x = -\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\varepsilon_\varphi$$

und somit aus der ersten Gleichung

$$\sigma_\varphi = \varepsilon_\varphi\,[1+\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)]\,2\,G\,\gamma(\psi_0^2) \qquad (4.4)$$

folgen.

[1] K. *Girkmann*, Flächentragwerke, S. 448, 4. Aufl. Wien 1956.

Um das Schnittmoment m_x berechnen zu können, muß zuerst die Spannung σ_x bekannt sein. Sie folgt aus (3.4) zu

$$\sigma_x = \frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)} G\,\gamma(\psi_0^2)\,[\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,\varepsilon_\varphi]\,. \tag{4.5}$$

Die Schubspannung $\tau_{\varphi x}$ verschwindet wegen der Drehsymmetrie.

Mit den Verschiebungskomponenten u, v, w ergeben sich die folgenden allgemeinen Beziehungen für die Verzerrungsgrößen[1]:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,\\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{z}{a\,(a+z)}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{a+z}\,,\\
\psi_{\varphi x} &= \frac{1}{a+z}\,\frac{\partial u}{d\varphi} + \frac{a+z}{a}\,\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{a+z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

die sich (unter Berücksichtigung der Drehsymmetrie) wegen $v = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ in die Gestalt

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z\,\frac{d^2 w}{dx^2}\,, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{w}{a+z}\,, \quad \psi_{\varphi x} = 0 \tag{4.7}$$

bringen lassen.

Vernachlässigen wir, entsprechend den bekannten Vereinfachungen bei der Biegetheorie der Stäbe die Ableitung du/dx, so wird noch einfacher[2]

$$\varepsilon_x = -\,z\,\frac{d^2 w}{dx^2}\,, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{w}{a+z}\,. \tag{4.8}$$

Hiermit wird aus den Gleichungen (4.4) und (4.5)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= \frac{w}{a+z}\,[1 + \nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)]\,2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,,\\
\sigma_x &= \frac{2}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\,G\,\gamma(\psi_0^2)\left[-\,z\,\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{a+z}\,\gamma(\varepsilon_0,\psi_0^2)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Als erste Näherung nehmen wir jetzt an, daß die Dehnungs- und die Scherungsfunktion die Form

$$\varkappa(\varepsilon_0) \equiv 1\,, \qquad \gamma(\psi_0^2) \equiv 1 + \gamma_2\,\psi_0^2 \tag{4.10}$$

haben mögen. Entwickeln wir dann die Ausdrücke

$$\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)\,, \quad \frac{1}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}\,, \quad \frac{\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}$$

bis zu den in γ_2 linearen Gliedern, so erhalten wir[3]

$$\left.\begin{aligned}
\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2) &= \nu_0 - \frac{1}{3}\,(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)\,\gamma_2\,\psi_0^2\,,\\
\frac{1}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)} &= \frac{1}{1-\nu_0}\left[1 - \frac{(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)}{3\,(1-\gamma_0)}\,\gamma_2\,\psi_0^2\right],\\
\frac{\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)}{1-\nu(\varepsilon_0,\psi_0^2)} &= \frac{\gamma_0}{1-\nu_0}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)}{\nu_0\,(1-\nu_0)}\,\gamma_2\,\psi_0^2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Hierin bedeutet

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\,\frac{3\,K - 2\,G}{3\,K + G}$$

[1] *K. Girkmann* a. a. O. S. 469.
[2] *W. Flügge*, a. a. O. S. 147.
[3] *H. Kauderer* a. a. O. S. 149.

die Querzahl, die sich im linearen Fall ergeben würde. Mit diesen Ausdrücken gehen wir in (4.9) und sodann in (4.3) ein. Dies gibt

$$n_\varphi = 2\,G\,w \int_{-h}^{+h} \left[1 + \nu_0 - \frac{1}{3}(1+\nu_0)(1-2\nu_0)\gamma_2\psi_0^2\right](1+\gamma_2\psi_0^2)\frac{dz}{a+z}\,, \tag{4.12}$$

$$m_x = G \int_{-h}^{h} \left[\frac{2(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}{3(1-\nu_0)^2}\gamma_2\psi_0^2\left(\frac{w}{a+z} - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) - \frac{2}{1-\nu_0}\left(-z\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{w\nu_0}{a+z}\right)\right]$$
$$\times (1+\gamma_2\psi_0^2)\left(1+\frac{z}{a}\right) z\,dz\,. \tag{4.13}$$

Um nun auch noch die in diesen Gleichungen auftretende Funktion ψ_0^2 zu bestimmen, ist die Dehnung ε_z zu berechnen. Hierbei dürfen wir annehmen, daß ε_z im allgemeinen klein sein wird[1] gegenüber ε_x und ε_φ, so daß wir wie in der linearen Theorie

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_0}{1-\nu_0}(\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi) \tag{4.14}$$

setzen dürfen. Mit (4.8) und (4.14) ergeben sich dann nach (2.2) für ε_0 und ψ_0^2 die Gleichungen

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\nu_0}{3(1-\nu_0)}\left(\frac{w}{a+z} - z\frac{d^2w}{dx^2}\right), \tag{4.15}$$

$$\psi_0^2 = \frac{4}{3}\left[\eta_1 z^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \eta_2\frac{z\,w}{a+z}\frac{d^2w}{dx^2} + \eta_1\left(\frac{w}{a+z}\right)^2\right]. \tag{4.16}$$

Hierin sind zur Abkürzung die Konstanten

$$\eta_1 = \frac{2(1-\nu_0+\nu_0^2)}{3(1-\nu_0)^2}\,, \quad \eta_2 = \frac{2(1-4\nu_0+\nu_0^2)}{3(1-\nu_0)^2}$$

eingeführt.

Den Ausdruck für ψ_0^2 nach (4.16) setzen wir jetzt in die Gleichungen (4.12) für n_φ und (4.13) für m_x ein und führen die Integrationen aus. Mit den so gewonnenen Werten für m_x und n_φ gehen wir in die Gleichgewichtsbedingung (4.2) ein. Dann ergibt sich nach einer elementaren, aber etwas langwierigen Zwischenrechnung die folgende Differentialgleichung für $w(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^2w}{dx^2}(A_1 - A_2 w^2 + A_3 w^4) + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 A_4 w^3 - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3 A_5 - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^5 A_6 + A_7 w^3 - A_8 w^5\right]$$
$$+ \frac{d^2w}{dx^2}(B_1 w^2 + B_2 w^4) + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 (B_3 w - B_4 w^3) - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3 B_5 w^2$$
$$+ B_6 w + B_7 w^3 - B_8 w^5 = \varrho\,(l-x)\,, \tag{4.17}$$

in der zur Abkürzung die folgenden Konstanten verwendet worden sind:

$$A_0 = \frac{8(1+\nu_0)(1-2\nu_0)\gamma_2 G}{9(1-\nu_0)^2}\,,$$
$$A_1 = \frac{4\,G\,h^3}{3(1-\nu_0)}\,,$$
$$A_2 = \frac{2\,h^3}{3\,a^2}\left[(\nu_0\eta_2 - \eta_1)\frac{8\,G\,\gamma_2}{3(1-\nu_0)} - A_0(\eta_2 - \eta_1)\right],$$
$$A_3 = \frac{4\,A_0\gamma_2}{3}\left[\frac{2\,h\,(2\,h^2 - a^2)}{(a^2-h^2)^2} + \frac{2\,h}{a^2} + \frac{2\,h^3}{3\,a^4}\right](2\,\eta_1\eta_2 - \eta_1^2)\,,$$
$$A_4 = \frac{4\,A_0\gamma_2}{3}\left[2\,h - \frac{2\,a^2\,h}{a^2-h^2} + \frac{2\,h^3}{a^2}\right][(\eta_1-\eta_2)^2 + \eta_1^2]\,, \tag{4.18}$$
$$A_5 = \frac{2\,h^5}{5}\eta_1\left[A_0 - \frac{8\,G\,\gamma_2}{3(1-\nu_0)}\right],$$
$$A_6 = \frac{8\,A_0\gamma_2 h^7}{21}\eta_1^2\,,$$
$$A_7 = \left(\frac{2\,h}{a^2} - \frac{2\,h}{a^2-h^2} + \frac{2\,h^3}{3\,a^4}\right)\left[A_0 - \frac{8\,G\,\gamma_2\nu_0}{3(1-\nu_0)}\right]\eta_1\,,$$
$$A_8 = \frac{32\,A_0\gamma_2 h^3\eta_1^2}{9(a^2-h^2)^3}$$

[1] *H. Kauderer* a. a. O. S. 145.

und

$$
\left.
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{16\,G\,(1+\nu_0)^2\,\gamma_2\,\eta_2}{9\,a}\left[\frac{2\,h}{a}-\frac{2\,a\,h}{a^2-h^2}+\frac{2\,h^3}{3\,a^3}\right],\\
B_2 &= \frac{64\,G\,(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)\,\gamma_2^2\,8\,h^3\,\eta_1\,\eta_2}{81\,(a^2-h^2)^3},\\
B_3 &= \frac{32\,G\,(1+\nu_0)^2\,\gamma_2\,h^3\,\eta_1}{27\,a^2},\\
B_4 &= \frac{32\,G\,(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)\,\gamma_2^2\,(\eta_2^2+2\,\eta_1^2)}{27\,a}\left[\frac{2\,a\,h\,(2\,h^2-a^2)}{(a^2-h^2)^2}+\frac{2\,h}{a}+\frac{2\,h^3}{3\,a^3}\right],\\
B_5 &= \frac{64\,G\,(1+\nu_0)\,(1-2\,\nu_0)\,\gamma_2^2}{27\,a}\left(2\,a\,h-\frac{2\,a^3\,h}{a^2-h^2}+\frac{2\,h^3}{a}\right)\eta_1\,\eta_2,\\
B_6 &= \frac{4\,G\,(1+\nu_0)}{a}\left(\frac{h}{a}+\frac{h^3}{3\,a^3}\right),\\
B_7 &= \frac{32\,G\,(1+\nu_0)^2\,\gamma_2\,h\,\eta_1}{9\,(a^2-h^2)^2},\\
B_8 &= \frac{64\,G\,(1+\nu_0)\,(1-2\nu_0)\,\gamma_2^2\,h\,(a^2+h^2)\,\eta_1^2}{27\,(a^2-h^2)^4}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.19)
$$

Auf der linken Seite von (4.17) ist der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich m_x und der ganze Ausdruck dahinter gleich $\frac{1}{a}\,n_\varphi$.

Setzt man in (4.17) $\gamma_2 = 0$, so wird

$$A_0 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0\,, \quad A_1 \neq 0\,,$$
$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_7 = B_8 = 0\,, \quad B_6 \neq 0\,,$$

und wir erhalten dann die bekannte Differentialgleichung bei linearem Elastizitätsgesetz.

5. Die Randbedingungen und die Lösung der Differentialgleichung. Um die nichtlineare Differentialgleichung (4.17) zu lösen, benützen wir ein Verfahren der sukzessiven Approximation. Hierzu bringen wir die Gleichung zunächst auf die Form

$$
\begin{aligned}
&A_1\frac{d^4w}{dx^4}+B_6\,w-\varrho\,(l-x)=\\
&\quad\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^2w}{dx^2}\,(A_2\,w^2-A_3\,w^4)-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2A_4\,w^3+\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3A_5+\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^5A_6-A_7\,w^3+A_8\,w^5\right]\\
&\quad-\frac{d^2w}{dx^2}\,(B_1\,w^2+B_2\,w^4)-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2(B_3\,w-B_4\,w^3)+\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3B_5\,w^2-B_7\,w^3+B_8\,w^5\,. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Eine Näherung nullter Ordnung liefert die inhomogene Differentialgleichung

$$A_1\frac{d^4w^{(0)}}{dx^4}+B_6\,w^{(0)}-\varrho\,(l-x)=0\,, \qquad (5.2)$$

die man durch Nullsetzen der linken Seite von (5.1) erhält. Ihre Lösung ist mit den Integrationskonstanten c_i sofort geschlossen angebbar. Sie lautet

$$w^{(0)}=\frac{a^2}{2\,E\,h}\,\varrho\,(l-x)+e^{\lambda x}\,(c_1\cos\lambda\,x+c_2\sin\lambda\,x)+e^{-\lambda x}\,(c_3\cos\lambda\,x+c_4\sin\lambda\,x)\,, \qquad (5.3)$$

wobei

$$4\,\lambda^4\equiv\frac{B_6}{A_1}=\frac{3\,(1-\nu_0^2)}{a^2\,h^2} \qquad (5.4)$$

gesetzt ist. In dem Ausdruck für den dort auftretenden Koeffizienten B_6 ist, wie der Vergleich mit (4.19) zeigt, $h^3/3\,a^3$ gegenüber h/a vernachlässigt worden, da $h \ll a$ ist. Die Lösung (5.3) ist zugleich die Lösung der linearen Theorie.

Für die weitere Untersuchung sehen wir von der (nur im Hinblick auf eine spätere Anwendung) gemachten Annahme, daß der Behälter mit Flüssigkeit gefüllt sei, ab und setzen daher von jetzt

an ϱ gleich Null. Die Lösung (5.3) setzt sich dann aus zwei jeweils mit Abklingfaktoren versehenen periodischen Ausdrücken zusammen. Der erste (mit dem Faktor $e^{\lambda x}$) nimmt vom oberen und der zweite (mit dem Faktor $e^{-\lambda x}$) vom unteren Rand des Zylinders aus ab. Da die Höhe des Zylinders meistens so groß ist, daß die beiden von den Rändern ausgehenden Störungen sich nicht mehr gegenseitig beeinflussen, so dürfen wir bei der Aufstellung der Bedingungen für den oberen Rand $c_3 = c_4 = 0$ und für den unteren Rand $c_1 = c_2 = 0$ setzen, so daß sich die Konstantenpaare c_1, c_2 bzw. c_3, c_4 unabhängig voneinander berechnen lassen.

Wir nehmen nun an, allein der untere Behälterrand sei belastet, und setzen demgemäß

$$c_1 = c_2 = 0 .$$

Dann wird aus der Gleichung (5.3)

$$w^{(0)} = e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x) . \tag{5.5}$$

Die Integrationskonstanten sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. Für gleichmäßig verteilte Randkräfte R lauten diese

$$(m)_{x=0} = 0 , \quad \left(\frac{dm_x}{dx}\right)_{x=0} \equiv (q_x)_{x=0} = - R \tag{5.6}$$

und für gleichmäßig verteilte Randmomente M

$$(m_x)_{x=0} = M , \qquad (q_x)_{x=0} = 0 . \tag{5.7}$$

Wirken R und M zusammen, so muß also

$$(m_x)_{x=0} = M , \qquad (q_x)_{x=0} = - R \tag{5.8}$$

werden.

Wir nehmen zuerst an, es seien allein die Randkräfte R wirksam. Die Gleichung (5.6) befriedigen wir dann näherungsweise dadurch, daß wir für das Moment m_x den Ausdruck benützen, der sich ergibt, wenn man in die eckige Klammer von (4.17) anstelle von w die Näherungslösung $w^{(0)}$ gemäß (5.5) einsetzt. So ergeben sich die folgenden beiden nichtlinearen Gleichungen für c_3 und c_4:

$$- 2 \lambda^2 c_4 [A_1 - A_2 c_3^2 + A_3 c_3^4] + A_4 4 \lambda^4 c_4^2 c_3^3 + 8 A_5 \lambda^6 c_4^3 + 32 A_6 \lambda^{10} \cdot c_4^5 + A_7 c_3^3 - A_8 c_3^5 = 0 , \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}(c_3 + c_4) (A_1 - A_2 c_3^2 + A_3 c_3^4 - 4 A_4 \lambda^2 c_3^3 c_4 - 12 A_5 \lambda^4 c_4^2 - 80 A_6 \lambda^8 c_4^3) 2 \lambda^3 \\ + (c_4 - c_3) (4 \lambda^2 A_2 c_4 c_3 - 8 \lambda^2 A_3 c_4 c_3^3 + 12 A_4 \lambda^4 c_3^2 c_4^2 + 3 A_7 c_3^2 - 5 A_8 c_3^4) \lambda = - R .\end{aligned} \tag{5.10}$$

Mit den hieraus zu bestimmenden Werten von c_3 und c_4 setzen wir $w^{(0)}$ nach (5.5) in die rechte Seite der Differentialgleichung (5.1) ein und erhalten so die Differentialgleichung für die Näherung erster Ordnung

$$\begin{aligned}A_1 \frac{d^4 w^{(1)}}{dx^4} + B_6 w^{(1)} = \frac{d^2}{dx^2} \{ & (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x) 2 \lambda^2 e^{-\lambda x} [A_2 e^{-2\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^2 \\ & - A_3 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^4 e^{-4\lambda x}] \\ & - (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x)^2 4 \lambda^4 e^{-2\lambda x} A_4 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^3 e^{-3\lambda x} \\ & + (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x)^3 8 \lambda^6 e^{-3\lambda x} A_5 + A_6 \\ & \times (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x)^5 32 \lambda^{10} e^{-5\lambda x} - A_7 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^3 e^{-3\lambda x} \\ & + A_8 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^5 e^{-5\lambda x} \} - (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x) 2 \lambda^2 e^{-\lambda x} \\ & \times [B_2 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^4 e^{-4\lambda x} + B_1 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^2 e^{-2\lambda x}] \\ & - (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x)^2 4 \lambda^4 e^{-2\lambda x} [B_3 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x) e^{-\lambda x} \\ & - B_4 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^3 e^{-3\lambda x} + B_5 (c_3 \sin \lambda x - c_4 \cos \lambda x)^3 \\ & \times 8 \lambda^6 e^{-3\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^2 e^{-2\lambda x} \\ & - B_7 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^3 e^{-3\lambda x} + B_8 (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)^5 e^{-5\lambda x} .\end{aligned} \tag{5.11}$$

Eine Umordnung der rechten Seite und die Ausmultiplikation der Potenzen der trigonometrischen Funktionen ergibt nach einiger Zwischenrechnung

$$
\begin{aligned}
A_1 \frac{d^4 w^{(1)}}{dx^4} + B_6 w^{(1)} = \frac{d^2}{dx^2}\{ & e^{-3\lambda x}[(d_1 - e^{-2\lambda x} d_2)\cos 2\lambda x \sin \lambda x - (d_3 - e^{-2\lambda x} d_4)\cos 2\lambda x \cos \lambda x \\
& + e^{-2\lambda x} d_5 \cos 4\lambda x \cos \lambda x - e^{-2\lambda x} d_6 \cos 4\lambda x \sin \lambda x \\
& + (d_7 - e^{-2\lambda x} d_8)\sin 2\lambda x \sin \lambda x + (d_9 + e^{-2\lambda x} d_{10})\sin 2\lambda x \cos \lambda x \\
& + e^{-2\lambda x} d_{11} \sin 4\lambda x \cos \lambda x - e^{-2\lambda x} d_{12} \sin 4\lambda x \sin \lambda x + (d_{13} + e^{-2\lambda x} d_{14}) \\
& \times \sin \lambda x - (d_{15} + e^{-2\lambda x} d_{16})\cos \lambda x]\} + e^{-3\lambda x}(d_{17} + e^{-2\lambda x} d_{18})\cos \lambda x \sin \lambda x \\
& + (d_{19} + e^{-2\lambda x} d_{20})\cos 2\lambda x \cos \lambda x - (d_{21} + e^{-2\lambda x} d_{22})\sin 2\lambda x \cos 2\lambda x \\
& - (d_{23} + e^{-2\lambda x} d_{24})\sin 2\lambda x \sin \lambda x + (d_{25} + e^{-2\lambda x} d_{26})\sin 4\lambda x \cos \lambda x \\
& + (d_{27} + e^{-2\lambda x} d_{28})\sin 4\lambda x \sin \lambda x + e^{-2\lambda x} d_{29} \cos 4\lambda x \cos \lambda x \\
& + e^{-2\lambda x} d_{30} \cos 4\lambda x \sin \lambda x + (d_{31} + e^{-2\lambda x} d_{32})\cos \lambda x \\
& + (d_{33} + e^{-2\lambda x} d_{34})\sin \lambda x] . \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten d_i sind hierbei

$$
\left.
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{2}(2\lambda^2 A_2 c_3 - A_7 c_4 - c_3 8\lambda^6 A_5)(c_3^2 - c_4^2) , \\
d_2 &= \frac{1}{2}(2\lambda^2 A_3 c_3 - A_8 c_4 + 32 c_3 A_6 \lambda^{10})(c_3^4 - c_4^4) , \\
d_3 &= \frac{1}{2}(2\lambda^2 A_2 c_4 + A_7 c_3 - c_4 8\lambda^6 A_5)(c_3^2 - c_4^2) , \\
d_4 &= \frac{1}{2}(2\lambda^2 A_3 c_4 + A_8 c_3 + c_4 A_6 32\lambda^{10})(c_3^4 - c_4^4) , \\
d_5 &= \frac{1}{8}(2\lambda^2 A_3 c_4 + A_8 c_3 + c_3 A_4 4\lambda^4 - c_4 A_6 32\lambda^{10})(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4) , \\
d_6 &= \frac{1}{8}(2\lambda^2 A_3 c_3 - A_8 c_4 - c_4 A_4 4\lambda^4 - c_3 A_6 32\lambda^{10})(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4) , \\
d_7 &= c_3 c_4 (2\lambda^2 A_2 c_3 - A_7 c_4 - c_3 8\lambda^6 A_5) , \\
d_8 &= c_3 c_4 (c_3^2 + c_4^2)(2\lambda^2 A_3 c_3 - A_8 c_4 + c_3 A_6 32\lambda^{10}) , \\
d_9 &= c_3 c_4 (8\lambda^6 A_5 c_4 - A_7 c_3 - 2\lambda^2 A_2 c_4) , \\
d_{10} &= c_3 c_4 (c_3^2 + c_4^2)(2\lambda^2 A_3 c_4 + A_8 c_3 + c_4 A_6 32\lambda^{10}) , \\
d_{11} &= \frac{1}{2} c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(2\lambda^2 A_3 c_4 + A_8 c_3 + c_3 A_4 4\lambda^4 - c_4 A_6 32\lambda^{10}) , \\
d_{12} &= \frac{1}{2} c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(2\lambda^2 A_3 c_3 - A_8 c_4 - c_4 A_4 4\lambda^4 - c_3 A_6 32\lambda^{10}) \\
d_{13} &= \frac{1}{2}(c_3^2 + c_4^2)(2\lambda^2 A_2 c_3 - A_7 c_4 + c_3 A_5 8\lambda^6) , \\
d_{14} &= \frac{1}{8}(c_3^2 + c_4^2)^2 (96 c_3 A_6 \lambda^{10} - 6 A_3 c_3 \lambda^2 + 3 A_8 c_4 - c_4 A_4 4\lambda^4) , \\
d_{15} &= \frac{1}{2}(c_3^2 + c_4^2)(2\lambda^2 A_2 c_4 + A_7 c_3 + c_4 A_5 8\lambda^6) , \\
d_{16} &= \frac{1}{8}(c_3^2 + c_4^2)^2 (96 c_4 A_6 \lambda^{10} - 6 A_3 c_4 \lambda^2 - 3 A_8 c_3 + c_3 A_4 4\lambda^4) , \\
d_{17} &= 2\lambda^2 c_3 c_4 (B_1 c_4 + 2\lambda^2 B_3 c_3) - \frac{1}{2} B_7 c_4 (c_3^2 - c_4^2) , \\
d_{18} &= \frac{1}{2}(c_3^4 - c_4^4) c_4 B_8 + c_3 c_4 (c_3^2 + c_4^2)(B_2 c_4 - B_4 c_3 2\lambda^2)\lambda^2 , \\
d_{19} &= 2\lambda^2 c_3 c_4 (B_1 c_3 - 2\lambda^2 B_3 c_4) - \frac{1}{2} B_7 c_3 (c_3^2 - c_4^2) , \\
d_{20} &= \frac{1}{2}(c_3^4 - c_4^4) c_3 B_8 + c_3 c_4 (c_3^2 + c_4^2)(B_2 c_3 + B_4 c_4 2\lambda^2)\lambda^2 , \\
d_{21} &= \lambda^2 (c_3^2 - c_4^2)(B_1 c_3 - 2\lambda^2 B_3 c_4) + c_3^2 c_4 B_7 , \\
d_{22} &= \frac{1}{2}\lambda^2 (c_3^4 - c_4^4)(B_2 c_3 + B_4 c_4 2\lambda^2) - c_3^2 c_4 (c_3^2 + c_4^2) B_8 ,
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.13)
$$

$$d_{23} = \lambda^2 (c_3^2 - c_4^2)(B_1 c_4 + 2\lambda^2 B_3 c_3) + c_4^2 c_3 B_7 ,$$

$$d_{24} = \frac{1}{2}\lambda^2 (c_3^4 - c_4^4)(B_2 c_4 - B_4 c_3 2\lambda^2) - c_3 c_4^2 (c_3^2 + c_4^2) B_8 ,$$

$$d_{25} = \frac{1}{4} c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(c_3 B_8 + c_4 B_5 8\lambda^6) ,$$

$$d_{26} = \frac{1}{4}[c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(c_3 B_8 + c_4 B_5 8\lambda^6) - \lambda^2 (B_2 c_3 + B_4 c_4 2\lambda^2)(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4)] ,$$

$$d_{27} = \frac{1}{4} c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(c_4 B_8 - c_3 B_5 8\lambda^6) ,$$

$$d_{28} = \frac{1}{4}[c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(c_4 B_8 - c_3 B_5 8\lambda^6) - \lambda^2 (B_2 c_4 - B_4 c_3 2\lambda^2)(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4)] ,$$

$$d_{29} = c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(B_2 c_3 + B_4 c_4 2\lambda^2)\lambda^2 + \frac{1}{8}(c_3 B_8 + c_4 B_5 8\lambda^6)(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4) ,$$

$$d_{30} = c_3 c_4 (c_3^2 - c_4^2)(B_2 c_4 - B_4 c_3 2\lambda^2)\lambda^2 + \frac{1}{8}(c_4 B_8 - c_3 B_5 8\lambda^6)(c_3^4 - 6 c_3^2 c_4^2 + c_4^4) ,$$

$$d_{31} = -\frac{1}{2} B_7 c_3 (c_3^2 + c_4^2) ,$$

$$d_{32} = \frac{1}{8}(c_3^2 + c_4^2)^2 (3 c_3 B_8 - 8 c_4 B_5 \lambda^6) ,$$

$$d_{33} = -\frac{1}{2} B_7 c_4 (c_3^2 + c_4^2) ,$$

$$d_{34} = \frac{1}{8}(c_3^2 + c_4^2)^2 (3 c_4 B_8 + 8 c_3 B_5 \lambda^6) .$$

Ersetzen wir jetzt noch die in (5.12) auftretenden Produkte der trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden Summen oder Differenzen, so erhalten wir die Differentialgleichung für $w^{(1)}$ in der Form

$$A_1 \frac{d^4 w^{(1)}}{dx^4} + B_6 w^{(1)} = e^{-3\lambda x} \sum_{n=1,3,5} [(D_n + e^{-2\lambda x} G_n) \sin n\lambda x + (M_n + e^{-2\lambda x} N_n) \cos n\lambda x] , \quad (5.14)$$

wobei die folgenden Abkürzungen gebraucht werden:

$$D_1 = \frac{1}{2}[(-8 d_1 - 6 d_3 + 6 d_7 + 8 d_9 + 16 d_{13} - 12 d_{15})\lambda^2 - d_{17} - d_{21} + 2 d_{33}] ,$$

$$G_1 = \frac{1}{2}[(24 d_2 + 10 d_4 - 10 d_8 + 24 d_{10} + 48 d_{14} - 20 d_{16})\lambda^2 - d_{18} - d_{22} + 2 d_{34}] ,$$

$$D_3 = \frac{1}{2}[(-18 d_3 - 18 d_7)\lambda^2 + d_{17} - d_{21} + d_{25} ,$$

$$G_3 = \frac{1}{2}[(-16 d_2 + 30 d_4 + 30 d_5 + 16 d_6 + 30 d_8 + 16 d_{10} + 16 d_{11} - 30 d_{12})\lambda^2 + d_{18} - d_{22} + d_{26} - d_{30} ,$$

$$D_5 = \frac{d_{25}}{2} .$$

$$G_5 = \frac{1}{2}[(50 d_5 + 50 d_{12})\lambda^2 + d_{26} + d_{30} ,$$

$$M_1 = \frac{1}{2}[(6 d_1 - 8 d_3 + 8 d_7 - 6 d_9 - 12 d_{13} - 16 d_{15})\lambda^2 + d_{19} - d_{23} + 2 d_{31}] ,$$

$$N_1 = \frac{1}{2}[(-10 d_2 + 24 d_4 - 24 d_8 - 10 d_{10} - 20 d_{14} - 48 d_{16})\lambda^2 + d_{20} - d_{24} + 2 d_{32} ,$$

$$M_3 = \frac{1}{2}[(-18 d_1 - 18 d_9)\lambda^2 + d_{19} + d_{23} + d_{27} ,$$

$$N_3 = \frac{1}{2}[(30 d_2 + 16 d_4 + 16 d_5 - 30 d_6 + 16 d_8 - 30 d_{10} - 30 d_{11} - 16 d_{12})\lambda^2 + d_{20} + d_{24} + d_{28} + d_{29} ,$$

$$M_5 = -\frac{d_{27}}{2} ,$$

$$N_5 = \frac{1}{2}[(50 d_6 - 50 d_{11})\lambda^2 - d_{28} + d_{29}] . \quad (5.15)$$

Die Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung (5.14) ist bekannt. Ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung können wir in der Form

$$w_0^{(1)} = e^{-3\lambda x} \sum_{n=1,3,5} [(D_{0n} + e^{-2\lambda x} G_{0n}) \sin n\lambda x + (M_{0n} + e^{-2\lambda x} N_{0n}) \cos n\lambda x] \tag{5.16}$$

ansetzen. Die Koeffizienten D_{0n}, G_{0n}, M_{0n} und N_{0n} lassen sich bestimmen, wenn man mit (5.16) in die Gleichung (5.14) eingeht. Für $n = 1$, 3 oder 5 ergibt sich hier allgemein

$$\begin{aligned} A_1\lambda^4 \{ & D_{0n}(81 - 54n^2 + n^4) + 12n(9 - n^2) M_{0n} + e^{-2\lambda x}[G_{0n}(625 - 150n^2 + n^4) \\ & + 20n(25 - n^2) N_{0n}]\} \sin n\lambda x + A_1\lambda^4 \{ M_{0n}(81 - 54n^2 + n^4) \\ & - 12n D_{0n}(9 - n^2) + e^{-2\lambda x}[N_{0n}(625 - 150n^2 + n^4) \\ & - 20n(25 - n^2) G_{0n}]\} \cos n\lambda x + B_6 (D_{0n} + e^{-2\lambda x} G_{0n}) \sin n\lambda x \\ & + B_6 (M_{0n} + e^{-2\lambda x} N_{0n}) \cos n\lambda x \\ & \equiv (D_n + e^{-2\lambda x} G_n) \sin n\lambda x + (M_n + e^{-2\lambda x} N_n) \cos n\lambda x , \end{aligned}$$

und hieraus folgen die linearen Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} D_{0n}[A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6] + [12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2)] M_{0n} &= D_n , \\ -D_{0n}[12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2)] + [A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6] M_{0n} &= M_n , \\ G_{0n}[A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6] + [20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2)] N_{0n} &= G_n , \\ -G_{0n}[20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2)] + [A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6] N_{0n} &= N_n . \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Aus diesen berechnen sich die unbekannten Koeffizienten zu

$$\left.\begin{aligned} D_{0n} &= \frac{\begin{vmatrix} D_n & 12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2) \\ M_n & A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6 & 12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2) \\ -12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2) & A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6 \end{vmatrix}} , \\ M_{0n} &= \frac{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6 & D_n \\ -12(9 - n^2) n A_1\lambda^4 & M_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(81 - 54n^2 + n^4) + B_6 & 12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2) \\ -12 A_1\lambda^4 n(9 - n^2) & A_1\lambda^4(81 - 54n + n^4) + B_6 \end{vmatrix}} , \\ G_{0n} &= \frac{\begin{vmatrix} G_n & 20 A_1\lambda n(25 - n^2) \\ N_n & A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6 & 20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2) \\ -20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2) & A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6 \end{vmatrix}} , \\ N_{0n} &= \frac{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6 & G_n \\ -20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2) & N_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) + B_6 & 20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2) \\ -20 A_1\lambda^4 n(25 - n^2) & A_1\lambda^4(625 - 150n^2 + n^4) B_6 \end{vmatrix}} , \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Haben wir diese Koeffizienten bestimmt, so lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.14)

$$\begin{aligned} w^{(1)} = e^{-\lambda x} (V \cos\lambda x + W \sin\lambda x) + e^{-3\lambda x} \sum_{n=1,3,5} & [(D_{0n} + e^{-2\lambda x} G_{0n}) \sin n\lambda x \\ & + (M_{0n} + e^{-2\lambda x} N_{0n}) \cos n\lambda x] . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Die Integrationskonstanten V und W sind wiederum aus den Randbedingungen (5.6) zu ermitteln. Setzen wir $w^{(1)}$ aus (5.19) in die eckige Klammer aus (4.17) ein und benutzen den so ge-

wonnenen Näherungsausdruck für m_x, so liefern die Bedingungen (5.6) die folgenden beiden nichtlinearen Gleichungen für V und W:

$$\{-2\lambda^2 W-\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]\}$$
$$\times\{A_1-A_2[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^2+A_3[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^4\}$$
$$+A_4[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^3\{2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}$$
$$+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]\}^2+A_5\{2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}$$
$$+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]\}^3+A_6\{2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}$$
$$+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]\}^5+A_7[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^3$$
$$-A_8[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^5=0\,, \tag{5.20}$$

$$\{2\lambda^3(V+W)+\lambda^3\sum_{n=1,3,5}[9M_{0n}(n^2-3)-nD_{0n}(n^2-27)+nG_{0n}(75-n^2)$$
$$+5N_{0n}(3n^2-25)\}\{A_1-A_2[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^2$$
$$+A_3[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^4-2A_4[2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}$$
$$+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]][V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^3$$
$$-3A_5[2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]]^2$$
$$-5A_6[2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}(n^2-25)+N_{0n}+10nG_{0n}]]^4\}$$
$$+[\lambda(W-V)+\lambda\sum_{n=1,3,5}nD_{0n}-3M_{0n}+nG_{0n}-5N_{0n}]$$
$$\times\{[2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}+6nD_{0n}+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]]$$
$$\times[2A_2[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]-4A_3[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^3]$$
$$+3A_4[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^2[2\lambda^2 W+\lambda^2\sum_{n=1,3,5}[(n^2-9)M_{0n}$$
$$+6nD_{0n}+(n^2-25)N_{0n}+10nG_{0n}]]^2+[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^2[3A_7-5A_8$$
$$\times[V+\sum_{n=1,3,5}(M_{0n}+N_{0n})]^2]\}=-R\,. \tag{5.21}$$

Hiermit ist die Näherungslösung erster Ordnung für die Differentialgleichung (5.1) unter den Randbedingungen (5.6) gefunden. Das Verfahren der sukzessiven Näherung läßt sich in entsprechender Weise wiederholen und ermöglicht so grundsätzlich die Berechnung der Schnittkräfte und der Schnittmomente m_x, n_φ, q_x sowie der Spannungsverteilung mit beliebiger Genauigkeit.

Hat man $w(x)$ hinreichend genau ermittelt, so folgen m_x, n_φ und q_x aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
m_x &= \frac{d^2w}{dx^2}(A_1-A_2w^2+A_3w^4)+\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2A_4w^3-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3A_5-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^5A_6\\
&\qquad +A_7w^3-A_8w^5\,,\\
q_x &= \frac{dm_x}{dx}\,,\\
n_\varphi &= \frac{d^2w}{dx^2}a(B_1w^2+B_2w^4)+\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2a(B_3w-B_4w^3)-a\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3B_5w^2+B_6aw\\
&\qquad +B_7aw^3-B_8aw^5\,.
\end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Ist der Rand allein durch Momente M gleichmäßig belastet, so lassen sich für die Rechnung dieselben Formeln benutzen. An die Stelle der Randbedingungen (5.7) tritt dann (5.6), und dies hat zur Folge, daß auf den rechten Seiten der Gleichungen (5.9) und (5.20) das Moment M und auf den rechten Seiten von (5.10) und (5.21) der Wert Null erscheint.

Entsprechend sind bei gleichzeitiger Wirkung von R und M die rechten Seiten von (5.9) und (5.20) gleich M und diejenigen von (5.10) und (5.21) gleich $-\mathrm{R}$.

6. Der kreiszylindrische Flüssigkeitsbehälter mit eingespanntem Mantelfuß. Das in Ziffer 5 dargestellte Berechnungsverfahren läßt sich zur Ermittlung der Schnittkraft und des Schnittmomentes eines Flüssigkeitsbehälters mit eingespanntem unteren Rand verwenden. Hierbei ist, wie bei allen nichtlinearen Problemen, zu beachten, daß das Superpositionsgesetz nicht mehr gilt.

Im Fall des *Hooke*schen Gesetzes ließe sich aus der hier bekannten allgemeinen Lösung für $w(x)$ auf Grund der Einspannbedingungen am Mantelfuß

$$[w(x)]_{x=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0 \tag{6.1}$$

die Schnittkraft R und das Schnittmoment M sofort berechnen.

Im nichtlinearen Fall können wir nun folgendermaßen vorgehen: Wir setzen die nullte Näherungslösung

$$w^{(0)}(x) = \frac{a^2}{2Eh}\varrho\,(l-x) + e^{-\lambda x}\,(c_3\cos\lambda x + c_4\sin\lambda x) \tag{6.2}$$

in die Randbedingungen (6.1) ein und bestimmen hieraus die Konstanten c_3 und c_4. Die so gewonnene Lösung (6.2) setzen wir in die rechte Seite der Differentialgleichung (5.1) ein und bestimmen deren allgemeine Lösung. Sie enthält wieder zwei Integrationskonstanten V und W, die aus den Randbedingungen (6.1) zu bestimmen sind. Mit der hiermit gewonnenen Näherung erster Ordnung für w geht man nun in die Gleichungen (5.8) ein, aus denen sich jetzt M und R berechnen lassen. Die Zwischenrechnungen sind zwar elementar, aber ziemlich umständlich. Sie sollen daher hier nicht wiedergegeben werden.

(Eingegangen am 26. Februar 1959.)

Anschrift des Verfassers: Doç.-Dr. *Müh. S. Tameroğlu*, Istanbul (Türkei) Güzelbahçe, Yeni Kardeşler Sok. Refet Apt. 1/7 Nisantas.

Bending of Simply Supported Rectangular Plates With Clamped Portions Along Arbitrary Sections of the Edges

By M. Kurata

1. Introduction. It seems that problems on the bending of rectangular thin plates have been worked out for almost all combinations of edge conditions. Nevertheless, problems such as stipulated in the title have been left comparatively untouched. In this paper, a method of solving such problems is presented in as general a form as possible in an attempt to fill up this gap. The theoretical solution is obtained by means of determining the resisting moments introduced along the clamped portions of the edge which shall just cancel the slope of the surface of a plate.

Numerical results shall be given for three square plates subjected to a uniformly distributed load. The first example is a square plate having a clamped portion in the middle of one edge; the second example is one having the same portion as before on every edge; and the third example is a plate clamped in the neighborhood of every corner. Finally, the experimental results are briefly referred to and it is shown that an agreement is found between theory and experimental data.

2. The simply supported plate bent by a single moment acting upon the edge. The expressions of the deflection surface into which a simply supported plate is bent by a single moment applied to a given point of the edge are introduced here for latter convenience. Referring to Fig. 1, the

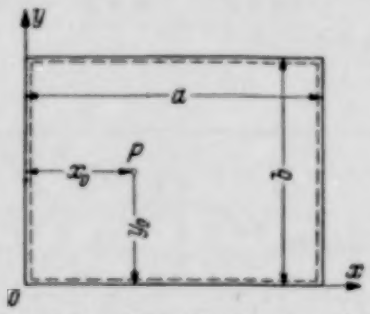


Fig. 1. Plate under a unit load and system of coordinates.

deflection function $\bar{w}$ of the plate subjected to a unit concentrated load applied to a given point $P(x_0, y_0)$ is expressed in the following manner: Denoting $\bar{w}$ by $\bar{w}_1$ for $x_0 < x$, we have[1]

$$\bar{w}_1 = \frac{b^2}{D\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta}{n^3 \sinh n\pi\lambda} \{\sinh n\pi(\lambda-\xi)[(1+n\pi\lambda\coth n\pi\lambda)\sinh n\pi\xi_0 - n\pi\xi_0 \cosh n\pi\xi_0] - n\pi(\lambda-\xi)\cosh n\pi(\lambda-\xi)\sinh n\pi\xi_0\}, \quad (2.1)$$

and denoting $\bar{w}$ by $\bar{w}_2$ for $x_0 > x$,

$$\bar{w}_2 = \frac{b^2}{D\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta}{n^3 \sinh n\pi\lambda} \{\sinh n\pi(\lambda-\xi_0)[(1+n\pi\lambda\coth n\pi\lambda)\sinh n\pi\xi - n\pi\xi \cosh n\pi\xi] - n\pi(\lambda-\xi_0)\cosh n\pi(\lambda-\xi_0)\sinh n\pi\xi\}. \quad (2.2)$$

In the above expressions, it is noted that

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{b}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b},$$

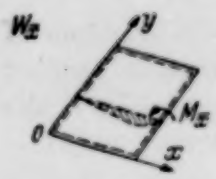
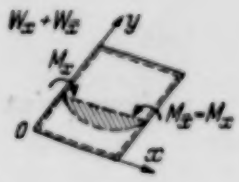
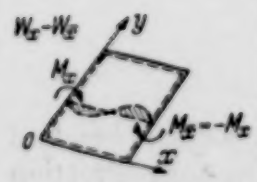
and D is the flexural rigidity of plate.

Now, using the expression (2.1), the deflection function w_x of the plate bent by a single bending moment M_x what is applied at a given point $y = y_0$ on the edge line $x = 0$ and in such direction that the axis of the moment M_x coincides with the y axis can be given by the following operation:[2]

$$w_x = M_x \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_0}\right]_{x_0=0}.$$

[1] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, p. 195, Wien 1954.
[2] *A. Nadai*, Elastische Platten, p. 162, Berlin 1925.

Table 1

Case	$f_n(x)$, $f_n'(x)$ and their *Fouriers* representations
(1)	$f_n(x) = \frac{a}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \left\{ -\frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} + \frac{x}{a} \cosh \frac{n\pi}{b}(a-x) \right\}$ $= \frac{4a^2}{\pi^2 b} \sum_{m\,(1,2,3,\ldots)} \frac{m}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a}.$
	$f_n'(x) = \frac{1}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \left\{ -\frac{n\pi a}{b} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} + \cosh \frac{n\pi}{b}(a-x) - \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi}{b}(a-x) \right\}$
(2) 	$\bar{f}_n(x) = \frac{a}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \left\{ \coth \frac{n\pi a}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b} - \frac{x}{a} \cosh \frac{n\pi x}{b} \right\}$ $= \frac{4a^2}{\pi^2 b} \sum_{m\,(1,2,3,\ldots)} \frac{(-1)^{m-1} m}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a}$
	$\bar{f}_n'(x) = \frac{1}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \left\{ \frac{n\pi a}{b} \coth \frac{n\pi a}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b} - \cosh \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b} \right\}$
(3) 	$f_n(x) + \bar{f}_n(x) = \frac{a}{n \cosh \frac{n\pi a}{2b}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\cosh \frac{n\pi a}{2b}} + \frac{x}{a} \sinh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) \right\}$ $= \frac{8a^2}{\pi^2 b} \sum_{m\,(1,3,5,\ldots)} \frac{m}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a}$
	$f_n'(x) + \bar{f}_n'(x) = \frac{1}{n \cosh \frac{n\pi a}{2b}} \left\{ \frac{n\pi a}{2b} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{b}}{\cosh \frac{n\pi a}{2b}} + \sinh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) - \frac{n\pi x}{b} \cosh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) \right\}$
(4) 	$f_n(x) - \bar{f}_n(x) = \frac{a}{n \sinh \frac{n\pi a}{2b}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{2b}} + \frac{x}{a} \cosh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) \right\}$ $= \frac{8a^2}{\pi^2 b} \sum_{m\,(2,4,6,\ldots)} \frac{m}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a}$
	$f_n'(x) - \bar{f}_n'(x) = \frac{1}{n \sinh \frac{n\pi a}{2b}} \left\{ -\frac{n\pi a}{2b} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{2b}} + \cosh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) - \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi}{b}\left(\frac{a}{2} - x\right) \right\}$

The deflection function $w_{\bar{x}}$ produced by a single moment of the same kind $M_{\bar{x}}$ applied at a point $y = y_0$ on the edge $x = a$ is similarly given by using the expression (2.2) as follows:

$$w_{\bar{x}} = M_{\bar{x}} \left[\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial x_0} \right]_{x_0 = a} .$$

The same process can also be applied in obtaining the deflection function produced by a single moment of the same kind M_y or $M_{\bar{y}}$ which is acted upon at the $y = 0$ or $y = b$, respectively. For reference, the results through actual operations will now be enumerated below.

1) The deflection and the slope displacements produced by the moment M_x are

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{M_x}{D\pi} \sum_n \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot f_n(x) , \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} &= \frac{M_x}{D\pi} \sum_n \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot f_n'(x) , \\ \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{M_x}{Db} \sum_n n \sin \frac{n\pi y_0}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cdot f_n(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

2) The deflection and the slope displacements produced by the moment M_y are

$$\left.\begin{aligned} w_y &= \frac{M_y}{D\pi} \sum_n \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot g_n(y) , \\ \frac{\partial w_y}{\partial y} &= \frac{M_y}{D\pi} \sum_n \sin \frac{n\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot g_n'(y) , \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} &= \frac{M_y}{Da} \sum_n n \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot g_n(y) . \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

The function $f_n(x)$, $f_n'(x)$ contained in the expressions (2.3) are those shown in the item of Case (1) in Table 1 together with its *Fourier* series expression.

Next, the deflection and the slope displacement produced by the moment $M_{\bar{x}}$ are also given in the same forms as expression (2.3). In this case, however, it should be remarked that M_x in (2.3) is changed to $M_{\bar{x}}$ and the functions $\bar{f}_n(x)$, $\bar{f}_n'(x)$ shown in the item of Case (2) in Table 1, are used instead of $f_n(x)$, $f_n'(x)$, respectively.

In the case of symmetrical bending when the plate is acted upon simultaneously by both moments M_x and $M_{\bar{x}}$ whose magnitudes are equal to each other, the deflection and the slope displacement are given by expressions which are replaced respectively by $f_n(x) + \bar{f}_n(x)$ and $f_n'(x) + \bar{f}_n'(x)$ shown in the item of Case (3) in Table 1, instead of $f_n(x)$ and $\bar{f}_n(x)$ in (2.3).

In the case of antisymmetrical bending of the plate subjected to moments M_x und $-M_{\bar{x}}$ of the same magnitude, the expressions in (2.3) become applicable by replacing $f_n(x)$ and $\bar{f}_n(x)$ by $f_n(x) - \bar{f}_n(x)$ and $f_n'(x) - \bar{f}_n'(x)$ shown in the item of Case (4) in the table.

The expressions by moment M_y or $M_{\bar{y}}$ are shown in (2.4) ,which are obtained from the expression in (2.3) by replacing M_x or $M_{\bar{x}}$ by M_y or $M_{\bar{y}}$ and the transpositions (a, b) and (x, y). Therefore, the functions $g_n(y)$, $g_n'(y)$ in (2.4) are, corresponding to each of the cases, those produced from $f_n(x)$, $f_n'(x)$ and so on tabulated in Table 1 by similar rewriting. The *Fourier* series expressions of $f_n(x)$ shown in Table 1 can also be written briefly as follows:

$$f_n(x) = \frac{4a^2}{\pi^2 b} \sum_{m = 1, 2, 3 \ldots} \frac{k_m m}{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (0 \leqq x \leqq a) \qquad (2.5)$$

in which the coefficient k_m signifies values tabulated in Table 2 corresponding to each case.

Table 2

Case	1	2	3	4
k_m	1	$(-1)^{m-1}$	$1 + (-1)^{m-1}$	$1 - (-1)^{m-1}$

3. The slope displacement at the edge produced by the single moments acting simultaneously on several points on the edge line. The following nomenclature is used with respect to a single moment acting on a given point of the edge as below: For instance, M_{x_i} means a single moment which is acting upon point $y = v_i$ on the edge line $x = 0$ and in a plane perpendicular to the y-axis. $M_{\bar{x}_i}$ means a same moment on the opposite edge $x = a$. Similarly, M_{y_i} means the moment on the edge $y = 0$ and $M_{\bar{y}_i}$ means that on the opposite edge $y = b$ (see Fig. 2). In the next place, let us, for instance, denote the slope displacement at the edge $x = 0$ caused by the above-mentioned moments as follows: $\Theta_{x x_i}$ is the slope displacement caused by M_{x_i}, $\Theta_{x \bar{x}_i}$ is that by $M_{\bar{x}_i}$, $\Theta_{x y_i}$ by M_{y_i} and $\Theta_{x \bar{y}_i}$ by $M_{\bar{y}_i}$.

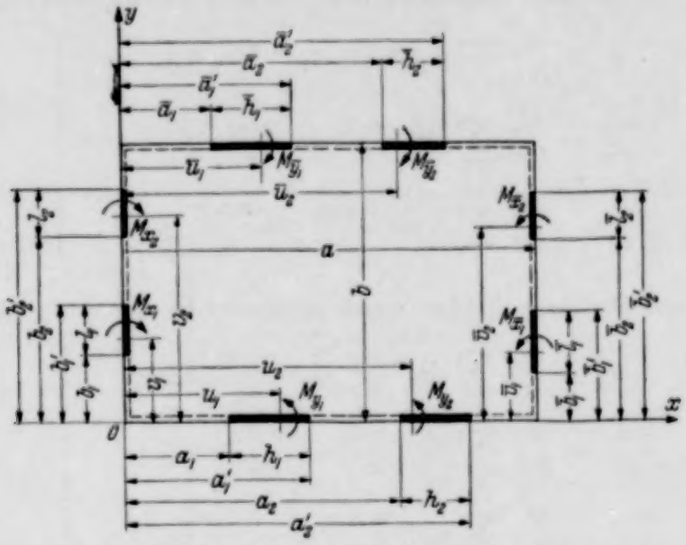


Fig. 2. Notations concerning edge moments.

Using these notations, the resultant angle displacement $\Theta_{x=0}$ produced by the combined action of these moments can be written in the following form:

$$\Theta_{x=0} = \sum_i^{\alpha} \Theta_{x x_i} + \sum_i^{\beta} \Theta_{x \bar{x}_i} + \sum_i^{\gamma} \Theta_{x y_i} + \sum_i^{\delta} \Theta_{x \bar{y}_i} \tag{3.1}$$

in which each summation sign on the right hand side means the sum corresponding to the number of single moments on each edge. Similarly, the following expressions are obtained with respect to the resultant angle displacements: — $\Theta_{x=a}$ at the edge $x = a$ and those at the edge $y = 0$ and $y = b$,

$$\Theta_{x=a} = \sum_i^{\alpha} \Theta_{\bar{x} x_i} + \sum_i^{\beta} \Theta_{\bar{x} \bar{x}_i} + \sum_i^{\gamma} \Theta_{\bar{x} y_i} + \sum_i^{\delta} \Theta_{\bar{x} \bar{y}_i}, \tag{3.2}$$

$$\Theta_{y=0} = \sum_i^{\alpha} \Theta_{y x_i} + \sum_i^{\beta} \Theta_{y \bar{x}_i} + \sum_i^{\gamma} \Theta_{y y_i} + \sum_i^{\delta} \Theta_{y \bar{y}_i}, \tag{3.3}$$

$$\Theta_{y=b} = \sum_i^{\alpha} \Theta_{\bar{y} x_i} + \sum_i^{\beta} \Theta_{\bar{y} \bar{x}_i} + \sum_i^{\gamma} \Theta_{\bar{y} y_i} + \sum_i^{\delta} \Theta_{\bar{y} \bar{y}_i}. \tag{3.4}$$

Each term on the right hand side of the above expressions may be written down by using (2.3) or (2.4). Taking each term of (3.1), for example, we have by rewriting the subscript of w_x, M_x by x_i and taking as $y_0 = v_i$

$$\Theta_{x x_i} = \left| \frac{\partial w_{x_i}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M_{x_i}}{D \pi} \sum_n \sin \frac{n \pi v_i}{b} \sin \frac{n \pi y}{b} \cdot f_n'(0), \tag{3.5}$$

$$\Theta_{x \bar{x}_i} = \left| \frac{\partial w_{\bar{x}_i}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M_{\bar{x}_i}}{D \pi} \sum_n \sin \frac{n \pi \bar{v}_i}{b} \sin \frac{n \pi y}{b} \cdot \bar{f}_n'(0) \tag{3.6}$$

in which $\bar{f}_n'(0)$ is that obtained by taking $x = 0$ in the expression $\bar{f}_n'(x)$ of Case (2) in Table 1. Similarly, rewriting the subscript y used in (2.4) by y_i and taking as $x_0 = u_i$ or rewriting that by $\bar{y}$

and taking as $x_0 = \bar{u}_i$, the following respective expressions are obtained:

$$\Theta_{x y_i} = \left| \frac{\partial w_{y_i}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M_{y_i}}{D a} \sum_n n \sin \frac{n \pi u_i}{a} \cdot g_n(y) , \tag{3.7}$$

$$\Theta_{x \bar{y}_i} = \left| \frac{\partial w_{\bar{y}_i}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M_{\bar{y}_i}}{D a} \sum_n n \sin \frac{n \pi \bar{u}_i}{a} \cdot \bar{g}_n(y) \tag{3.8}$$

where $\bar{g}_n(y)$ is that obtained from $\bar{f}_n(x)$ of Case (2), Table 1, by such transpositions as already stated. Hereafter, it will generally be considered that the top bar is attached above the notations representing the quantities relating to the opposite sides against the coordinate axes.

Next, for each term of (3.2), similar derivation from (2.3) or (2.4) also gives

$$\Theta_{\bar{x} x_i} = \left| \frac{\partial w_{x_i}}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{M_{x_i}}{D \pi} \sum_n \sin \frac{n \pi v_i}{b} \sin \frac{n \pi y}{b} \cdot f_n'(a) , \tag{3.9}$$

$$\Theta_{\bar{x} \bar{x}_i} = \left| \frac{\partial w_{\bar{x}_i}}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{M_{\bar{x}_i}}{D \pi} \sum_n \sin \frac{n \pi \bar{v}_i}{b} \sin \frac{n \pi y}{b} \cdot \bar{f}_n'(a) , \tag{3.10}$$

$$\Theta_{\bar{x} y_i} = \left| \frac{\partial w_{y_i}}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{M_{y_i}}{D a} \sum_n (-1)^n n \sin \frac{n \pi u_i}{a} \cdot g_n(y) , \tag{3.11}$$

$$\Theta_{\bar{x} \bar{y}_i} = \left| \frac{\partial w_{\bar{y}_i}}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{M_{\bar{y}_i}}{D a} \sum_n (-1)^n n \sin \frac{n \pi \bar{u}_i}{a} \cdot \bar{g}_n(y) . \tag{3.12}$$

Since the meaning of (3.3) and (3.4) is quite analogous respectively to those of (3.1) and (3.2) with the exception of the difference of the concerned sides of the plate, each term in the right hand side of such expressions may also be derived from (3.5) to (3.8) and (3.9) to (3.12) by making the following transpositions:

$$\left.\begin{array}{lll} (x, y) , & (u_i, v_i) , & (M_{x_i}, M_{y_i}) , \\ (a, b) , & (\bar{u}_i, \bar{v}_i) , & (M_{\bar{x}_i}, M_{\bar{y}_i}) . \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

Accordingly, the rewriting of the functions must be carried out by such transpositions as

$$f_n'(0) \to g_n'(0) , \quad \bar{f}_n'(0) \to \bar{g}_n'(0) , \quad g_n(y) \to f_n(x) , \quad \bar{g}_n(y) \to \bar{f}_n(x) .$$

4. The slope displacement at the edge produced by the moments distributed in several sections along the edge line. Next, let us regard the single moment M_{x_i}, $M_{\bar{x}_i}$, M_{y_i}, $M_{\bar{y}_i}$, respectively, as the intensities of the distributed moments in the intervals h_i, $\bar{h}_i$, l_i, $\bar{l}_i$. Then the expressions for the total slope displacement at the edge produced by such distributed moments can be obtained by integrating the right hand side of Eqs. (3.5) to (3.8), Eqs. (3.9) to (3.12) and so on through their own intervals and substituting them into expressions (3.1) to (3.4). The actual operation gives

$$\begin{aligned} \Theta_{x=0} = & \frac{1}{D \pi} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} f_n'(0) \sin n \pi \eta + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} \bar{f}_n'(0) \sin n \pi \eta \right] \\ & + \frac{1}{D a} \left[\sum_i^{\gamma} \sum_n Y_{ni} n g_n(\eta) + \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} n \bar{g}_n(\eta) \right] , \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{x=a} = & \frac{1}{D \pi} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} f_n'(a) \sin n \pi \eta + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} \bar{f}_n'(a) \sin n \pi \eta \right] \\ & + \frac{1}{D a} \left[\sum_i^{\gamma} \sum_n Y_{ni} (-1)^n n g_n(\eta) + \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} (-1)^n n \bar{g}_n(\eta) \right] , \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{y=0} = & \frac{1}{D \pi} \left[\sum_i^{\gamma} \sum_n Y_{ni} g_n'(0) \sin n \pi \xi + \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} \bar{g}_n'(0) \sin n \pi \xi \right] \\ & + \frac{1}{D b} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} n f_n(\xi) + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} n \bar{f}_n(\xi) \right] , \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{y=b} = & \frac{1}{D \pi} \left[\sum_i^{\gamma} \sum_n Y_{ni} g_n'(b) \sin n \pi \xi + \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} \bar{g}_n'(b) \sin n \pi \xi \right] \\ & + \frac{1}{D b} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} (-1)^n n f_n(\xi) + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} (-1)^n n \bar{f}_n(\xi) \right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

where

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{x}{a}\,, \qquad \eta = \frac{y}{b}\,, \\ &X_{ni} = \int_{b_i}^{b_i'} M_{x_i} \sin\frac{n\pi v_i}{b}\, dv_i\,, \qquad \bar{X}_{ni} = \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i'} M_{\bar{x}_i} \sin\frac{n\pi \bar{v}_i}{b}\, d\bar{v}_i\,, \\ &Y_{ni} = \int_{a_i}^{a_i'} M_{y_i} \sin\frac{n\pi u_i}{a}\, du_i\,, \qquad \bar{Y}_{ni} = \int_{\bar{a}_i}^{\bar{a}_i'} M_{\bar{y}_i} \sin\frac{n\pi \bar{u}_i}{a}\, d\bar{u}_i \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

and $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mean the number of sections to which the moments are distributed. The upper and the lower limits of the above integrations represent the end points of the moment distribution, that is

$$a_i' - a_i = h_i\,, \quad \bar{a}_i' - \bar{a}_i = \bar{h}_i\,, \quad b_i' - b_i = l_i\,, \quad \bar{b}_i' - \bar{b}_i = \bar{l}_i\,.$$

Now, assume that such distributed moments may be taken in the form of the following trigonometrical series:

$$\left.\begin{aligned} &M_{x_i} = \sum_s E_{si} \sin\frac{s\pi y_i}{l_i}\,, \qquad M_{\bar{x}_i} = \sum_s \bar{E}_{si} \sin\frac{s\pi \bar{y}_i}{\bar{l}_i}\,, \\ &M_{y_i} = \sum_s F_{si} \sin\frac{s\pi x_i}{h_i}\,, \qquad M_{\bar{y}_i} = \sum_s \bar{F}_{si} \sin\frac{s\pi \bar{x}_i}{\bar{h}_i} \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

in which

$$0 < y_i < l_i\,, \quad 0 < \bar{y}_i < \bar{l}_i\,, \quad 0 < x_i < h_i\,, \quad 0 < \bar{x}_i < \bar{h}_i\,.$$

Substituting the series (4.6) into expression (4.5), we have

$$\left.\begin{aligned} &X_{ni} = -\frac{l_i}{\pi} \sum_s s\, E_{si}\, \Phi_{sn}(b, l_i)\,, \qquad \bar{X}_{ni} = -\frac{\bar{h}_i}{\pi} \sum_s s\, \bar{E}_{si}\, \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\,, \\ &Y_{ni} = -\frac{l_i}{\pi} \sum_s s\, F_{si}\, \Phi_{sn}(a, h_i)\,, \qquad \bar{Y}_{ni} = -\frac{\bar{l}_i}{\pi} \sum_s s\, \bar{F}_{si}\, \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i) \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

where the symbols Φ_{sn} used in the above, e. g. $\Phi_{sn}(b, l_i)$, represents the function of the following type:

$$\Phi_{sn}(b, l_i) = \frac{(-1)^s \sin\dfrac{n\pi b_i'}{b} - \sin\dfrac{n\pi b_i}{b}}{s^2 - \dfrac{l_i^2}{b^2} n^2}\,. \tag{4.8}$$

From this, it will be considered that $\Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)$ represents the function obtained from expression (4.8) by replacing b_i', b_i, l_i, by $\bar{b}_i'$, $\bar{b}_i$, $\bar{l}_i$. Similarly, $\Phi_{sn}(a, h_i)$ is obtained from expression (4.8), exchanging b_i', b_i, l_i and b, respectively, for a_i', a_i, h_i, and a. Moreover, $\Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)$ means the function obtained by taking $\bar{a}_i'$, $\bar{a}_i$, $\bar{h}_i$ instead of a_i', a_i, h_i in the above function. Hereafter, the symbol Φ will be used as the expression for the function of type (4.8), taking into account that the use of the other notations for contained variables or suffixes means the replacement of them in the corresponding places of expression (4.8).

5. Modification of the representable interval by a trigonometrical series. Each of Eqs. (4.1) to (4.4) introduced in the previous section represents slope displacement along the full length of the edge on one side. Expression (4.1), for example, represents the slope displacement at any point on the edge $x = 0$. Now, let us consider for the sake of latter convenience, the method by which those expressions become representable only in the interval of the distribution of each moment. Take as an example the following series:

$$H(x_1) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x_1}{a}$$

which can represent some given function in the interval $0 < x_1 < a$. Expanding again this series in *Fourier* series which is representable in the subinterval $a_1 < x_1 < a_1'$ (or $0 < x_2 < h$), we obtain

$$\sum_n A_n \sin \frac{n\pi x_1}{a} = -\frac{2}{\pi} \sum_m m \sin \frac{m\pi x_2}{h} \sum_n A_n \Phi_{mn}(a, h) , \tag{5.1}$$

in which

$$\Phi_{mn}(a, h) = \frac{(-1)^m \sin \frac{n\pi a_1'}{a} - \sin \frac{n\pi a_1}{a}}{m^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2} . \tag{5.2}$$

The left hand side of Eq. (5.1) is an expression of function $H(x_1)$ in the interval $0 < x_1 < a$ and the right hand side stands for the same function only in the interval $a_1 < x_1 < a_1'$ or $0 < x_2 < h$. Making use of relation (5.1), expression (4.1) can therefore be rewritten into the expression which holds only in $0 < y_i < l_j$ $(b_j' - b_j = l_j)$. First considering the above, the first term on the right hand side of expression (4.1) is transformed into

$$\sum_n X_{ni} f_n'(0) \sin \frac{n\pi y}{b} = -\frac{2}{\pi} \sum_m m \sin \frac{m\pi y_j}{l_j} \sum_n X_{ni} f_n'(0) \Phi_{mn}(b, l_j) .$$

The same process is applicable also to the second term. Concerning the third term, if relation (5.1) is applied to the series form of $g_n(\eta)$ (see (2.5)), we obtain

$$\sum_n Y_{ni} n g_n\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{4b^2}{\pi^2 a} \sum_n Y_{ni} n \sum_m \frac{k_m m}{\left(m^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$= -\frac{8b^2}{\pi^3 a} \sum_m m \sin \frac{m\pi y_j}{l_j} \sum_n Y_{ni} n \sum_r \frac{k_r r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{mr}(b, l_j) \qquad (k_r = 1) .$$

The forth term also can be rewritten in the same way as above, provided that $k_m = (-1)^{m-1}$ is taken to make the series representation of $\bar{g}_n(y/b)$. Eventually, we find that expression (4.1) is transformed into

$$\Theta_{x=0} = -\frac{2}{D\pi^2} \sum_m m \sin \frac{m\pi y_j}{l_j} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} f_n'(0) \Phi_{mn}(b, l_j) + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} \bar{f}_n'(0) \Phi_{mn}(b, l_j) \right.$$

$$+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\gamma} \sum_n Y_{ni} n \sum_r \frac{r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{mr}(b, l_j)$$

$$\left. + \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{mr}(b, l_j) \right] . \qquad (0 < y_j < l_j) \tag{5.3}$$

Similarly, expressions (4.2) to (4.4) are transformed into

$$\Theta_{x=a} = -\frac{2}{D\pi^2} \sum_m m \sin \frac{m\pi \bar{y}_j}{\bar{l}_j} \left[\sum_i^{\alpha} \sum_n X_{ni} f_n'(a) \Phi_{mn}\left(b, \bar{l}_j\right) + \sum_i^{\beta} \sum_n \bar{X}_{ni} \bar{f}_n'(a) \Phi_{mn}(b, \bar{l}_j) \right.$$

$$+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\gamma'} \sum_i Y_{ni} (-1)^n n \sum_r \frac{r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{mr}\left(b, \bar{l}_j\right)$$

$$\left. + \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\delta} \sum_n \bar{Y}_{ni} (-1)^n n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{mr}\left(b, \bar{l}_j\right) \right] \qquad \left(0 < \bar{y}_j < \bar{l}_j\right) \tag{5.4}$$

$$\Theta_{y=0} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi x_j}{h_j}\left[\sum_i^{\gamma}\sum_n Y_{ni}\, g_n'(0)\, \Phi_{mn}(a, h_j) + \sum_i^{\delta}\sum_n \bar{Y}_{ni}\, \bar{g}_n'(0)\, \Phi_{mn}(a, h_j)\right.$$
$$+ \frac{4a^2}{\pi b^2}\sum_i^{\alpha}\sum_n X_{ni}\, n \sum_r \frac{r}{\left(r^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\Phi_{mr}(a, h_j)$$
$$\left. + \frac{4a^2}{\pi b^2}\sum_i^{\beta}\sum_n \bar{X}_{ni}\, n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} r}{\left(r^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\Phi_{mr}(a, h_j)\right] \qquad (0 < x_j < h_j)\,, \tag{5.5}$$

$$\Theta_{y=b} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi \bar{x}_j}{\bar{h}_j}\left[\sum_i^{\gamma}\sum_n Y_{ni}\, g_n'(b)\, \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j) + \sum_i^{\delta}\sum_n \bar{Y}_{ni}\, \bar{g}_n'(b)\, \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j)\right.$$
$$+ \frac{4a^2}{\pi b^2}\sum_i^{\alpha}\sum_n X_{ni}(-1)^n n \sum_r \frac{r}{\left(r^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\Phi_{mr}(a, \bar{h}_j)$$
$$\left. + \frac{4a^2}{\pi b^2}\sum_i^{\beta}\sum_n \bar{X}_{ni}(-1)^n n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} r}{\left(r^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\Phi_{mr}(a, \bar{h}_j)\right] \qquad (0 < \bar{x}_j < \bar{h}_j)\,. \tag{5.6}$$

Thus, we have found the expressions representing the slope displacement Θ only in the section of the distribution of a moment.

6. The conditional equations for partial clamping. The deflection function of a simply supported plate under a given load is expressed by a single sine series of x or y as widely known, and then the angle displacement φ along the edge can also be expressed by a similar series. Now let us assume that those angle displacements are given as follows:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{x=0} &= \frac{1}{D\pi}\sum_n B_n \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \text{on} \quad x=0; \qquad \varphi_{x=a} = \frac{1}{D\pi}\sum_n \bar{B}_n \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \text{on} \quad x=a\,,\\ \varphi_{y=0} &= \frac{1}{D\pi}\sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad \text{on} \quad y=0; \qquad \varphi_{y=b} = \frac{1}{D\pi}\sum_n \bar{A}_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad \text{on} \quad y=b\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Referring to the procedure explained in the previous section, those slope displacements are transformed into the following series which are applicable only in sections of moment distribution, such as $0 < y_j < l_j$:

$$\varphi_{x=0} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi y_j}{l_j}\sum_n B_n\, \Phi_{mn}(b, l_j) \qquad (0 < y_j < l_j)\,, \tag{6.2}$$

$$\varphi_{x=a} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi \bar{y}_j}{\bar{l}_j}\sum_n \bar{B}_n\, \Phi_{mn}(b, \bar{l}_j) \qquad (0 < \bar{y}_j < \bar{l}_j)\,, \tag{6.3}$$

$$\varphi_{y=0} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi x_j}{h_j}\sum_n A_n\, \Phi_{mn}(a, h_j) \qquad (0 < x_j < h_j)\,, \tag{6.4}$$

$$\varphi_{y=b} = -\frac{2}{D\pi^2}\sum_m m \sin\frac{m\pi \bar{x}_j}{h_j}\sum_n \bar{A}_n\, \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j) \qquad (0 < \bar{x}_j < \bar{h}_j)\,. \tag{6.5}$$

If resisting moments on the side edges can be applied to cancel the slope displacement $\varphi_{x=0}$ in the interval $b_j < y < b_j'$ (i. e. $0 < y_j < l_j$) caused by a load, we must have

$$\varphi_{x=0} + \Theta_{x=0} = 0 \quad \text{for} \quad 0 < y_j < l_j$$

in which $\Theta_{x=0}$, $\varphi_{x=0}$ are given by (5.3) and (6.2), respectively. Regarding slope displacements on other side edges, the same consideration again holds. That is

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{x=0} + \Theta_{x=0} &= 0 \quad \text{for} \quad 0 < y_j < l_j\,,\\ \varphi_{x=a} + \Theta_{x=a} &= 0 \quad \text{for} \quad 0 < \bar{y}_j < \bar{l}_j\,,\\ \varphi_{y=0} + \Theta_{y=0} &= 0 \quad \text{for} \quad 0 < x_j < h_j\,,\\ \varphi_{y=b} + \Theta_{y=b} &= 0 \quad \text{for} \quad 0 < \bar{x}_j < \bar{h}_j\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

To make each of the equations in (6.6) into identity, we must equate their respective coefficients to zero after the substitution of expressions (5.3) to (5.6) and (6.2) to (6.5). In this way the following equations are obtained, using the expressions [(5.3) to (5.6)] for Θ which have been substituted from expressions (4.7):

for $b_j < y < b_j'$, $(b_j' - b_j = l_j)$,

$$\begin{aligned}\sum_n B_n \Phi_{mn}(b, l_j) = &\sum_i^{\alpha} \frac{l_i}{\pi}\left[\sum_s s\, E_{si} \sum_n f_n'(0)\, \Phi_{sn}(b, l_i)\, \Phi_{mn}(b, l_j)\right] \\ &+ \sum_i^{\beta} \frac{\bar{l}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{E}_{si} \sum_n \bar{f}_n'(0)\, \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\, \Phi_{mn}(b, l_j)\right] \\ &+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\gamma} \frac{h_i}{\pi}\left[\sum_s s\, F_{si} \sum_n \sum_r \frac{n\, r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(a, h_i)\, \Phi_{mr}(b, l_j)\right] \\ &+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\delta} \frac{\bar{h}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{F}_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} n\, r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)\, \Phi_{mr}(b, l_j)\right]; \end{aligned} \tag{6.7}$$

for $\bar{b}_j < y < \bar{b}_j'$, $\left(\bar{b}_j' - \bar{b}_j = \bar{l}_j\right)$,

$$\begin{aligned}\sum_n \bar{B}_n \Phi_{mn}(b, \bar{l}_j) = &\sum_i^{\alpha} \frac{l_i}{\pi}\left[\sum_s s\, E_{si} \sum_n f_n'(a)\, \Phi_{sn}(b, l_i)\, \Phi_{mn}(b, \bar{l}_j)\right] \\ &+ \sum_i^{\beta} \frac{\bar{l}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{E}_{si} \sum_n \bar{f}_n'(a)\, \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\, \Phi_{mn}(b, \bar{l}_j)\right] \\ &+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\gamma} \frac{h_i}{\pi}\left[\sum_s s\, F_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^n\, n\, r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(a, h_i)\, \Phi_{mr}(b, \bar{l}_j)\right] \\ &+ \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_i^{\delta} \frac{\bar{h}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{F}_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^{n+r-1} n\, r}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)\, \Phi_{mr}(b, \bar{l}_j)\right]; \end{aligned} \tag{6.8}$$

for $a_j < x < a_j'$, $(a_j' - a_j = h_j)$,

$$\begin{aligned}\sum_n A_n \Phi_{mn}(a, h_j) = &\sum_i^{\gamma} \frac{h_i}{\pi}\left[\sum_s s\, F_{si} \sum_n g_n'(0)\, \Phi_{sn}(a, h_i)\, \Phi_{mn}(a, h_j)\right] \\ &+ \sum_i^{\delta} \frac{\bar{h}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{F}_{si} \sum_n \bar{g}_n'(0)\, \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)\, \Phi_{mn}(a, h_j)\right] \\ &+ \frac{4a^2}{\pi b^2} \sum_i^{\alpha} \frac{l_i}{\pi}\left[\sum_s s\, E_{si} \sum_n \sum_r \frac{n\, r}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(b, l_i)\, \Phi_{mr}(a, h_j)\right] \\ &+ \frac{4a^2}{\pi b^2} \sum_i^{\beta} \frac{\bar{l}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{E}_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^{r-1} n\, r}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\, \Phi_{mr}(a, h_j)\right]; \end{aligned} \tag{6.9}$$

for $\bar{a}_j < x < \bar{a}_j'$, $\left(\bar{a}_j' - \bar{a}_j = \bar{h}_j\right)$,

$$\begin{aligned}\sum_n \bar{A}_n \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j) = &\sum_i^{\gamma} \frac{h_i}{\pi}\left[\sum_s s\, F_{si} \sum_n g_n'(b)\, \Phi_{sn}(a, h_i)\, \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j)\right] \\ &+ \sum_i^{\delta} \frac{\bar{h}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{F}_{si} \sum_n \bar{g}_n'(b)\, \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)\, \Phi_{mn}(a, \bar{h}_j)\right] \\ &+ \frac{4a^2}{\pi b^2} \sum_i^{\alpha} \frac{l_i}{\pi}\left[\sum_s s\, E_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^n\, n\, r}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(b, l_i)\, \Phi_{mr}(a, \bar{h}_j)\right] \\ &+ \frac{4a^2}{\pi b^2} \sum_i^{\beta} \frac{\bar{l}_i}{\pi}\left[\sum_s s\, \bar{E}_{si} \sum_n \sum_r \frac{(-1)^{n+r-1} n\, r}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2} \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\, \Phi_{mr}(a, \bar{h}_j)\right]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

The above obtained four sets of equations express the conditions of clamping as explained before. The number of equations in each set corresponds to that of the clamped sections, i. e., Eq. (6.7) represents α kinds of equations according to the various values of subscript j. Similarly Eqs. (6.8), (6.9) and (6.10) represents respectively β kinds, γ kinds and δ kinds of equations. Moreover the system of equations in each kind consists of an infinite number of linear equations corresponding to the subscripts m and s.

If the unknown constants E_{si}, $\bar{E}_{si}$, F_{si}, $\bar{F}_{si}$ are obtained numerically by solving such a simultaneous equation, each of the moment distributions shown in (4.6) may be determined as a statically indeterminate resisting moment. Here it must be noted that the double series contained in those equations can generally be transformed into a single series for convenience of computation. Such an actual operation in detail will be illustrated in later examples.

7. Expression of deflection. If resisting moments (4.6) have been determined, substitute expressions (4.6) into (2.3) or (2.4) and integrate them respectively through the sections of moment distribution, then the deflection of a plate caused by such distributed moments is expressed by their sum. For example, let us consider the deflection produced by moment M_{x_i} which is given by the first expression in (4.6). Integrating the first expression of (2.3), which has been substituted from (4.6), gives

$$w_{x_i} = \frac{1}{D\pi} \sum_n \sum_s E_{si} f_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^{l_i} \sin \frac{n\pi (b_i + y_i)}{b} \sin \frac{s\pi y_i}{l_i} dy_i$$

$$= -\frac{l_i}{D\pi^2} \sum_n f_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \sum_s s\, E_{si}\, \Phi_{sn}(b, l_i) \tag{7.1}$$

where, since $b_i < y_0 < b_i'$, it was taken that $y_0 = b_i + y_i$, $0 < y_i < l_i$. The deflections produced by $M_{\bar{x}_i}$, M_{y_i} and $M_{\bar{y}_i}$ are also obtained in the same way. The results are

$$w_{\bar{x}_i} = -\frac{\bar{l}_i}{D\pi^2} \sum_n \bar{f}_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \sum_s s\, \bar{E}_{si}\, \Phi_{sn}(b, \bar{l}_i)\,, \tag{7.2}$$

$$w_{y_i} = -\frac{h_i}{D\pi^2} \sum_n g_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_s s\, F_{si}\, \Phi_{sn}(a, h_i)\,, \tag{7.3}$$

$$w_{\bar{y}_i} = -\frac{\bar{h}_i}{D\pi^2} \sum_n \bar{g}_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_s s\, \bar{F}_{si}\, \Phi_{sn}(a, \bar{h}_i)\,. \tag{7.4}$$

Denote by w' the deflection of a simply supported plate which is produced by a given load, then the required deflection in the problem concerned is given by the superposition of the above obtained deflections in the following form:

$$w = w' + \sum_i^{\alpha} w_{x_i} + \sum_i^{\beta} w_{\bar{x}_i} + \sum_i^{\gamma} w_{y_i} + \sum_i^{\delta} w_{\bar{y}_i}\,. \tag{7.5}$$

Further, stress resultants such as bending moment and so on can be determined, substituting the above obtained expression (7.5) into well-known formulas.

8. Illustrative Example 1: Symmetrical bending of a simply supported plate clamped along the middle portion of one edge. Let us suppose that the clamped portion h_1 is on the edge $y = 0$ (see Fig. 3) and the clamping moment distributed on h_1 can be expressed as

$$M_{y_1} = \sum_s F_{s,1} \sin \frac{s\pi x_1}{h}\,. \tag{8.1}$$

Taking as $j = \gamma = 1$, $\alpha = \beta = \delta = 0$ in the conditional equation (6.9) about edge $y = 0$ in consideration of the fact that there is no clamped portion on other edges, we get

$$\frac{h_1}{\pi} \sum_s s\, F_{s,1} \sum_n g_n'(0)\, \Phi_{sn}(a, h_1)\, \Phi_{mn}(a, h_1) = \sum_n A_n\, \Phi_{mn}(a, h_1)\,. \tag{8.2}$$

If the clamped portion is symmetrically situated on the edge line, i. e., if $a_1' = a - a_1$, it can be expressed that

$$(-1)^m \sin\frac{n\pi a_1'}{a} - \sin\frac{n\pi a_1} {a} = \begin{cases} 0, & \text{when } m+n \text{ is an odd number,} \\ -2\sin\dfrac{n\pi a_1}{a}, & \text{when } m+n \text{ is an even number.} \end{cases}$$

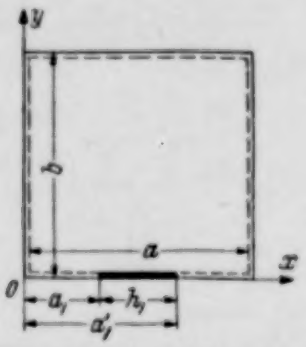


Fig. 3. Plate clamped partially on one edge.

Considering the above relationships, expression (4.8) is reduced to

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{mn}(a, h_1) &= -2\frac{\sin\dfrac{n\pi a_1}{a}}{m^2 - \dfrac{h_1^2}{a^2}n^2}, \quad \text{when} \quad m+n = \text{even}, \\ \Phi_{sn}(a, h_1) &= -2\frac{\sin\dfrac{n\pi a_1}{a}}{s^2 - \dfrac{h_1^2}{a^2}n^2}. \quad \text{when} \quad s+n = \text{even}. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

And on reference to the item of Case (1) in Table 1, we have

$$g_n'(0) = \frac{1}{n\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\left[-\frac{n\pi b}{a}\frac{1}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}} + \cosh\frac{n\pi b}{a}\right] = \frac{\varrho_n'}{n} \tag{8.4}$$

in which

$$\varrho_n' = 2\alpha_n - \coth 2\alpha_n\,(2\alpha_n \coth 2\alpha_n - 1), \qquad \alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}.$$

Moreover, assuming a load distributed symmetrically in x-direction, we find that the distribution of the slope of the deflection surface along the edge $y = 0$ becomes symmetrical in the same direction and then can be expressed by an odd series, i. e.

$$\varphi_{y=0} = \frac{1}{D\pi}\sum_{n\,(1.3.5\ldots)} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}. \tag{8.5}$$

Accordingly, n = odd number. From this we see that both m and s are odd in reference to (8.3). Now for simplicity, let us consider the case of a uniformly distributed load (load intensity: q). The deflection of a simply supported plate is given by the following well-known expression, i. e.

$$w' = \frac{4qa^4}{D\pi^5}\sum_{n\,(1.3.5\ldots)}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{a}\left[1 - \frac{\alpha_n\tanh\alpha_n + 2}{2\cosh\alpha_n}\cosh\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2\cosh\alpha_n}\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\sinh\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right]. \tag{8.6}$$

Using this, we find

$$\varphi_{y=0} = \left|\frac{\partial w'}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{2qa^3}{D\pi^4}\sum_{n\,(1.3.5\ldots)}\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{a}}{n^4\cosh\alpha_n}\left(\sinh\alpha_n - \frac{\alpha_n}{\cosh\alpha_n}\right). \tag{8.7}$$

Then the comparison of both expressions (8.5) and (8.7) gives

$$A_{n\,(n=1.3.5\ldots)} = -\frac{2\,q\,a^3}{\pi^3\,n^4}\frac{1}{\cosh\alpha_n}\left(\sinh\alpha_n - \frac{\alpha_n}{\cosh\alpha_n}\right) = -\frac{2\,q\,a^3}{\pi^3\,n^4}\varrho_n\,, \tag{8.8}$$

where

$$\varrho_n = \alpha_n - \tanh\alpha_n\,(\alpha_n\tanh\alpha_n + 1)\,.$$

In the sequel, the conditional equation for the case in which the plate is symmetrically clamped along the middle portion of the edge $y = 0$ and subjected to a uniformly distributed load is deduced from Eq. (8.2) into the following form:

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_{s,1}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n'}{n}\frac{\sin^2\frac{n\pi a_1}{a}}{\left(m^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)\left(s^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)} = \frac{q\,a^3}{\pi^2\,h_1}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n}{n^4}\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)\,. \tag{8.2'}$$

The above equations consist of an infinite set of linear equations whose unknown constants $F_{s,1}$ are obtainable by solving them simultaneously.

In the following, such a case of a square plate — the clamped portion is one-third of the length of the edge $y = 0$ — shall be handled as a numerical example. That is

$$a = b\,, \qquad \frac{h_1}{a} = \frac{1}{3}\,, \qquad \frac{a_1}{a} = \frac{1}{3}\,, \qquad a - 2\,a_1 = h_1\,.$$

And, since

$$a_1 = \frac{1}{2}\,(a - h_1)\,,$$

the relation

$$\sin\frac{n\pi a_1}{a} = \sin\frac{n\pi}{2\,a}(a - h_1) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi h_1}{2\,a} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

holds. Then, putting $h_1/a = \varkappa$, we have for the case when $\varkappa = m/n$

$$\lim_{\varkappa\to\frac{m}{n}}\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2} = \lim_{\varkappa\to\frac{m}{n}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\varkappa}{\left(\frac{m}{n}\right)^2-\varkappa^2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\lim_{\varkappa\to\frac{m}{n}}\frac{\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\varkappa}{2\,n^2\,\varkappa}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\pi\sin\frac{m\pi}{2}}{4\,n\left(\frac{m}{n}\right)} = -(-1)^{\frac{m+n}{2}}\frac{\pi}{4\,m}\,.$$

Here, considering $h_1/a = m/n$, it is concluded that

$$m + n = m\left(1 + \frac{a}{h_1}\right) = m\,(1 + 3) = 4\,m$$

and then

$$(-1)^{\frac{m+n}{2}} = (-1)^{2m} = 1\,.$$

Thus, the following relations are obtained:

$$\left.\begin{aligned}&\text{when}\quad \frac{m}{n} = \frac{h_1}{a} = \frac{1}{3}\,,\\ &\qquad\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-\frac{l_1^2}{a^2}n^2} = -\frac{\pi}{4\,m}\,,\\ &\text{when}\quad \frac{s}{n} = \frac{h_1}{a} = \frac{1}{3}\,,\\ &\qquad\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{s^2-\frac{l_1^2}{a^2}n^2} = -\frac{\pi}{4\,s}\,.\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Taking the first twelve coefficients of $s\,F_{s,1}$ on the left hand side of Eq. (8.2)′ and calculating each of them with due consideration of the above relationships, we obtain the equations shown in Table 3.

Solving of this system of equations yields the following values for the coefficients:

$$\begin{aligned} F_{1.1} &= -0.433174\,K, & 13\,F_{13.1} &= -1.52374\,K,\\ 3\,F_{3.1} &= -0.611130\,K, & 15\,F_{15.1} &= -1.70191\,K,\\ 5\,F_{5.1} &= -0.798825\,K, & 17\,F_{17.1} &= -1.88462\,K,\\ 7\,F_{7.1} &= -0.982804\,K, & 19\,F_{19.1} &= -2.06582\,K,\\ 9\,F_{9.1} &= -1.16385\,K, & 21\,F_{21.1} &= -2.23770\,K,\\ 11\,F_{11.1} &= -1.34416\,K, & 23\,F_{23.1} &= -2.42428\,K \end{aligned}$$

where

$$K = \frac{q\,a^3}{\pi^2\,h_1} = 3\,\frac{q\,a^2}{\pi^2}\,.$$

Referring to the expression (7.5), the deflection function is expressed as follows:

$$w = w' + w_{y_1}\,, \tag{8.10}$$

where w' is given by (8.6) and w_{y_1} by (7.3), i. e.

$$\begin{aligned} w_{y_1} &= -\frac{h_1}{D\pi^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} g_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_{s,1}\,\Phi_{sn}(a,h_1)\\ &= -\frac{a}{D\,3\pi^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_{s,1}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} g_n(y)\,\Phi_{sn}(a,h_1)\sin\frac{n\pi x}{a}\,. \end{aligned} \tag{8.11}$$

In the above, $g_n(y)$ and $\Phi_{sn}(a,h_1)$ are specified as

$$g_n(y) = \frac{a}{n\sinh n\pi}\left[-\frac{\sinh\frac{n\pi y}{b}}{\sinh n\pi} + \frac{y}{b}\cosh n\pi\left(1-\frac{y}{b}\right)\right],$$

$$\Phi_{sn}(a,h_1) = \begin{cases} -2\,\dfrac{\sin\frac{s\pi}{3}}{s^2-\frac{n^2}{9}}, & \text{when} \quad \dfrac{s}{n}\neq\dfrac{1}{3}\,,\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2\,s}, & \text{when} \quad \dfrac{s}{n}=\dfrac{1}{3}\,. \end{cases} \tag{8.11}'$$

Calculating the expression (8.11) with the previous values of the coefficients, we can determine the deflection by (8.10). Ratios of the deflections of some points to that of the center point are described in Table 4 and figured in Fig. 4 by means of contour lines so that the effect of partial clamping can be recognized.

In the foregoing, we used practically the twelve equations for the determination of $F_{s,1}$. But an infinite number of equations should be used because $F_{s,1}$ originally meant a term of a sequence. Therefore, we must investigate the convergency of such a sequence. First, neglect all the other terms except the first term on the left hand side of the first equation given in Table 3, then we can determine the value of $F_{1,1}$ and denote it as the first approximation. Second, take the first and the second equations from the table and neglect all the other except the first and the second terms on the left hand side as before, then we can obtain the values of $F_{1,1}$ and $3\,F_{3,1}$, and denote them as the second approximation. Afterward, proceeding in a similar way to determine the third, the fourth, . . ., etc. approximation, we obtain the results shown in Table 5 (namely, the previously obtained values are understood to be the twelveth approximation). Let us calculate the value of the deflection at the center point of the plate by using these approximations of coefficients. Denote by w_1 the values of deflection calculated with the use of the first approximation of coefficients, and by w_2 the value due to the second approximation and so on, then we obtain the results

Table 3. *Array of Coefficients of Equations*

m \ s	Left hand side of equations												Right hand side of Eqs..
	$E_{1.1}$	$3\,E_{3.1}$	$5\,E_{5.1}$	$7\,E_{7.1}$	$9\,E_{9.1}$	$11\,E_{11.1}$	$13\,E_{13.1}$	$15\,E_{15.1}$	$17\,E_{17.1}$	$19\,E_{19.1}$	$21\,E_{21.1}$	$23\,E_{23.1}$	$-\left(\frac{3\,q\,a^2}{\pi^2}\right)$
1	1.189635	0.0743879	0.0275081	0.0141737	$0.^{2}0861558$	$0.^{3}0578325$	$0.^{2}0414779$	$0.^{2}0311903$	$0.^{2}0243029$	$0.^{2}0194674$	$0.^{2}0159431$	$0.^{2}0132956$	0.641506
3	0.0743879	0.0334797	$0.^{2}0406836$	$0.^{2}0213111$	$0.^{2}0130762$	$0.^{3}08829$	$0.^{3}06357$	$0.^{3}04794$	$0.^{3}03743$	$0.^{3}03003$	$0.^{3}02462$	$0.^{3}02055$	0.0648958
5	0.0275081	$0.^{2}0406836$	$0.^{2}065202$	$0.^{3}08396$	$0.^{3}05188$	$0.^{3}03520$	$0.^{3}02543$	$0.^{3}01923$	$0.^{3}01504$	$0.^{3}01209$	$0.^{4}09929$	$0.^{4}08297$	0.0231840
7	0.0141737	$0.^{2}0213111$	$0.^{3}08396$	$0.^{2}022462$	$0.^{3}02782$	$0.^{3}01894$	$0.^{3}01373$	$0.^{3}01040$	$0.^{4}08156$	$0.^{4}06564$	$0.^{4}05395$	$0.^{4}04515$	0.0118044
9	$0.^{2}0861558$	$0.^{2}0130762$	$0.^{3}05188$	0.02782	$0.^{2}010196$	$0.^{3}01185$	$0.^{4}08611$	$0.^{4}06537$	$0.^{4}05131$	$0.^{4}04134$	$0.^{4}03402$	$0.^{4}02848$	$0.^{2}071347$
11	$0.^{3}0578325$	$0.^{3}08829$	$0.^{3}03520$	$0.^{3}01894$	$0.^{3}01185$	$0.^{3}05446$	$0.^{4}05909$	$0.^{4}04493$	$0.^{4}03533$	$0.^{4}02849$	$0.^{4}02346$	$0.^{4}01966$	$0.^{2}047741$
13	$0.^{2}0414779$	$0.^{3}06357$	$0.^{3}02543$	$0.^{3}01373$	$0.^{4}08611$	$0.^{4}05909$	$0.^{3}03238$	$0.^{4}03279$	$0.^{4}02581$	$0.^{4}02084$	$0.^{4}01719$	$0.^{4}01440$	$0.^{2}034172$
15	$0.^{2}0311903$	$0.^{3}04794$	$0.^{3}01923$	$0.^{3}01040$	$0.^{4}06537$	$0.^{4}04493$	$0.^{4}03279$	$0.^{3}02077$	$0.^{4}01970$	$0.^{4}01591$	$0.^{4}01332$	$0.^{4}01101$	$0.^{2}025663$
17	$0.^{2}0243029$	$0.^{3}03743$	$0.^{3}01504$	$0.^{4}08156$	$0.^{4}05131$	$0.^{4}03533$	$0.^{4}02581$	$0.^{4}01970$	$0.^{3}01410$	$0.^{4}01256$	$0.^{4}01036$	$0.^{5}0870$	$0.^{2}019978$
19	$0.^{2}0194674$	$0.^{3}03003$	$0.^{3}01209$	$0.^{4}06564$	$0.^{4}04134$	$0.^{4}02849$	$0.^{4}02084$	$0.^{4}01591$	$0.^{4}01256$	$0.^{3}01000$	$0.^{5}0839$	$0.^{5}0703$	$0.^{2}015992$
21	$0.^{2}0159431$	$0.^{3}02462$	$0.^{4}09929$	$0.^{4}05395$	$0.^{4}03402$	$0.^{4}02346$	$0.^{4}01719$	$0.^{4}01332$	$0.^{4}01036$	$0.^{5}0839$	$0.^{4}07355$	$0.^{5}0584$	$0.^{2}013090$
23	$0.^{2}0132956$	$0.^{4}02055$	$0.^{4}08297$	$0.^{4}04515$	$0.^{4}02848$	$0.^{4}01966$	$0.^{4}01440$	$0.^{4}01101$	$0.^{5}0870$	$0.^{5}0703$	$0.^{5}0584$	$0.^{4}05560$	$0.^{2}010912$

Note: In the table, $0.^{3}05446$, for example, means 0.0005446.

Table 4. *Distribution of Deflection*

x/a \ y/b	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12
1/12	0.0573	0.1151	0.1708	0.2207	0.2581	0.2798	0.2816	0.2628	0.2235	0.1631	0.0873
2/12	0.0997	0.2071	0.3166	0.4141	0.4884	0.5308	0.5361	0.4989	0.4234	0,3098	0.1647
3/12	0.1173	0.2652	0.4231	0.5648	0.6725	0.7341	0.7416	0.6927	0.5868	0.4287	0.2275
4/12	0.1071	0.2906	0.4896	0.6685	0.8044	0.8815	0.8926	0.8468	0.7063	0.5153	0.2730
5/12	0.0953	0.2981	0.5243	0.7279	0.8821	0.9703	0.9842	0.9195	0.7787	0.5679	0.3005
6/12	0.0932	0.2999	0.5348	0.7471	0.9078	1.0000	1.0145	0.9483	0.8028	0.5856	0.3098

Table 5. *The n-th Approximate Solution for Constants* $s\,E_{s,1}$ $\left(\text{coeff.} = -3\,\frac{q\,a^2}{\pi^2}\right)$

const. \ n-th	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th	12th
$E_{1.1}$	0.53925	0.48550	0.46544	0.45499	0.44858	0.44422	0.44116	0.43873	0.43689	0.43541	0.43419	0.43317
$3\,E_{3.1}$		0.85966	0.76906	0.71976	0.68870	0.66729	0.65191	0.63970	0.63028	0.62266	0.61641	0.61113
$5\,E_{5.1}$			1.11221	1.01694	0.95585	0.91321	0.87867	0.85754	0.83833	0.82269	0.80977	0.79882
$7\,E_{7.1}$				1.32130	1.22800	1.16233	1.11343	1.07561	1.04538	1.02067	1.00022	0.98280
$9\,E_{9.1}$					1.50250	1.41269	1.34542	1.29306	1.25114	1.21676	1.18819	1.16385
$11\,E_{11.1}$						1.66518	1.57900	1.51167	1.45746	1.41293	1.37585	1.34416
$13\,E_{13.1}$							1.81311	1.73054	1.66390	1.60895	1.56297	1.52374
$15\,E_{15.1}$								1.95103	1.87161	1.80609	1.74881	1.70191
$17\,E_{17.1}$									2.07989	2.00346	1.93956	1.88462
$19\,E_{19.1}$										2.20148	2.12830	2.06582
$21\,E_{21.1}$											2.30900	2.23770
$23\,E_{23.1}$												2.42428

Table 6. *Approximate Values of Center Deflection* $\left(\text{coeff.} = \frac{2\,q\,a^4}{D\,\pi^4}\right)$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
0.048653	0.051452	0.052370	0.052824	0.053093	0.053270
w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
0.053395	0.053491	0.053565	0.053624	0.053671	0.053711

in Table 6 and their graphical representation Fig. 5. From this, we can see that two significant figures at least can be readily decided for the values of deflection. Therefore it may be believed that the configuration shown in Fig. 4 is accurate enough from a practical point of view.

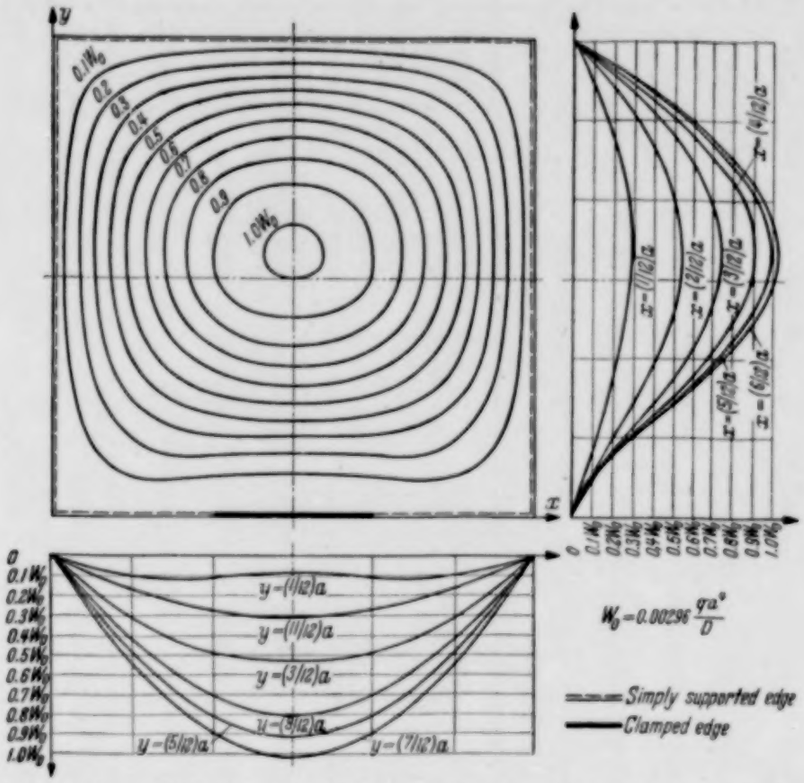


Fig. 4. Contour lines of deflection surface for the case when the middle portion of an edge is clamped.

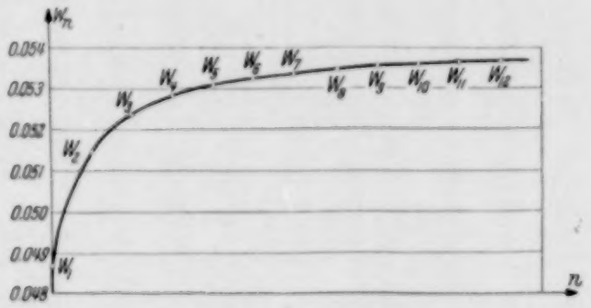


Fig. 5. Approximate values of center deflection. $\left(\text{Coeff.} = \frac{2\,q\,a^4}{D\,\pi^4}\right)$.

Moreover, let us investigate to what extent the condition of partial clamping is satisfied. Using (8.10), we see that the slope along the edge $y = 0$ is given by

$$\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \left|\frac{\partial w'}{\partial y}\right|_{y=0} + \left|\frac{\partial w_{y_1}}{\partial y}\right|_{y=0},$$

in which the first term on the right hand side is calculated by (8.7) and, from (8.11), the second term is given by

$$\left|\frac{\partial w_{y_1}}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{a}{D\,3\,\pi^2}\sum_s s\,F_{s,1}\sum_n \frac{\varrho'_n}{n}\,\Phi_{s\,n}(a, h_1)\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}$$

and here

$$\varrho'_n = n\,\pi - \coth n\,\pi\,(n\,\pi\coth n\,\pi - 1)\,.$$

The actual numerical results, which the use of the twelveth approximation of coefficients gives, are presented in Table 7 and Fig. 6. Observing these, we find that the condition of the edge is fairly well satisfied. Notwithstanding, near the points $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{a} = \frac{2}{3}$, where the edge con-

Table 7. *Slope Distribution along Edge* $y = 0$ $\left(\text{coeff.} = \frac{2\,q\,a^3}{D\,\pi^4}\right)$

Angle \ x/a	1/12	2/12	3/12	3.5/12	3.75/12	4/12	4.25/12	4.5/12	5/12	6/12
φ	0.184	0.347	0.480	0.533	0.556	0.577	0.596	0.612	0.637	0.657
Θ	—0.084	—0.177	—0.294	—0.376	—0.433	—	—0.599	—0.616	—0.633	—0.655
Sum	0.100	0.170	0.186	0.157	0.123	—	—0.003	—0.004	0.004	0.002

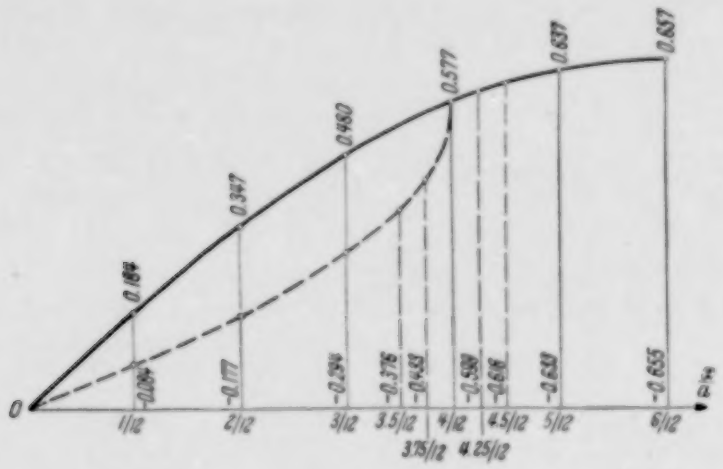


Fig. 6. Slope distribution along Edge $y = 0$. $\left(\text{Coeff.} = \frac{2\,q\,a^3}{D\,\pi^4}\right)$.

ditions abruptly changes, the above expression become incomputable because the series contained in the previous expression at such points do not converge. Now, the clamping moment on the edge is given by (4.6). Taking the center points $\frac{x_1}{h_1} = \frac{1}{2}$ of the clamped portion, for example, we have

$$M_{y_1} = \sum_{(1.3.5\ldots)} F_{s,1} \sin\frac{s\,\pi}{2} = F_{1,1} - F_{3,1} + F_{5,1} - F_{7,1} + \cdots .$$

This series is converging too slowly to be evaluated, but if *Euler*'s transformation[1] of series to improve the convergency of an alternating series is applied, the value can easily be evaluated. Such a transformation is formulated as

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, a_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

where $\Delta^n a_0$ means a foreward difference of n-th order. Now, applying this formula to the second and the subsequent terms of the previous series, we obtain the following result:

$$\begin{aligned} M_{y_1} &= -\,(0{,}433174 - 0{,}203709 + 0{,}159764 - 0{,}140400 + 0{,}129316 - 0{,}122196 \\ &\quad + 0{,}117210 - 0{,}113460 + 0{,}110860 - 0{,}108727 + 0{,}106557 - 0{,}105403 + \cdots)\,K \\ &= -\,0{,}433174\,K + \left(\frac{1}{2}\,0{,}203709 + \frac{1}{4}\,0{,}043945 + \frac{1}{8}\,0{,}024581 + \frac{1}{16}\,0{,}016301 + \cdots\right)K \\ &= -\,0{,}433174\,K + (0{,}101854 + 0{,}010986 + 0{,}003073 + 0{,}001018 + 0{,}000374 \\ &\quad + 0{,}000148 + 0{,}000062 + \cdots)\,K \fallingdotseq -\,0{,}3156\,K = -\,0{,}09593\,q\,a^2. \end{aligned}$$

Similarly, for the point $\frac{x_1}{h_1} = \frac{1}{4}$, such a series becomes

$$M_{y_1} = \sum_{(1.3.5\ldots)} F_{s,1} \sin\frac{s\,\pi}{4} = 0{,}707106\ (F_{1,1} + F_{3,1} - F_{5,1} - F_{7,1} + F_{9,1} + F_{11,1} - \cdots)$$

The above series can be regarded as an alternating series by summing every two terms. Then, applying the previous formula to this, we find

$$M_{y_1} \fallingdotseq -\,0.100\,q\,a^2 .$$

[1] *K. Knopp*, Theory and Application of Infinite Series, p. 244, London and Glasgow 1954.

At the change points of the edge condition, the above series discontinues to converge and then evaluation becomes impossible. This fact is due to the fact that such points as considered now are singular points where stress concentration occurs. Next, to derive the expression of the bending moment caused only by the clamping moment, the necessary expressions, from (8.11), are written as

$$\frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial x^2} = -\frac{h_1}{D\,a^2}\sum_s s\,F_{s,1}\sum_n n^2\,g_n(y)\,\Phi_{sn}(a,h_1)\sin\frac{n\pi x}{a}\,,$$

$$\frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial y^2} = -\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial x^2}\right) + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2\,h_1}{a\,\pi\,D}\right)\sum_s s\,F_{s,1}\sum_n \Phi_{sn}(a,h_1)\,\frac{\sinh n\pi\left(1-\frac{y}{b}\right)}{\sinh n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\,.$$

By putting $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, and $a=b$, $h_1=\frac{a}{3}$, the above expressions become

$$A \equiv \left|\frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial x^2}\right|_{x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}} = \frac{1}{12\,D}\sum_{s\,(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_{s,1}\sum_{n\,(1.3.5\ldots)}^{n} n\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\Phi_{sn}\,\frac{\tanh\frac{n\pi}{2}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\,,$$

$$B \equiv \left|\frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial y^2}\right|_{x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}} = \frac{1}{3\,D}\sum_{s\,(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_{s,1}\sum_{n\,(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\Phi_{sn}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{n}{4}\tanh\frac{n\pi}{2}\right).$$

These expressions provide the following numerical results:

$$A = 0{,}116\,\frac{q\,a^2}{\pi^2\,D}\,, \qquad B = 0{,}038\,\frac{q\,a^2}{\pi^2\,D}\,.$$

When the *Poisson*'s ratio is taken as $\nu = 0.3$, the bending moments can be evaluated as follows:

$$M_x'' = -D\,(A+\nu\,B) = -0{,}0129\,q\,a^2\,, \qquad M_y'' = -D\,(B+\nu\,A) = -0{,}00738\,q\,a^2\,,$$

while the bending moments at the center point of the simply supported plate are as well known

$$M_x' = M_y' = 0{,}0479\,q\,a^2\,.$$

Accordingly, by superposing them, the bending moments M_x und M_y at the center point of the plate in question are given as

$$M_x = (0{,}0479 - 0{,}0129)\,q\,a^2 = 0{,}035\,q\,a^2\,,$$
$$M_y = (0{,}0479 - 0{,}00738)\,q\,a^2 = 0{,}041\,q\,a^2\,.$$

Finally it may be remarked that if a similar consideration about the antisymmetrical case of bending are made, a general case can be easily discussed by the method of superposition.

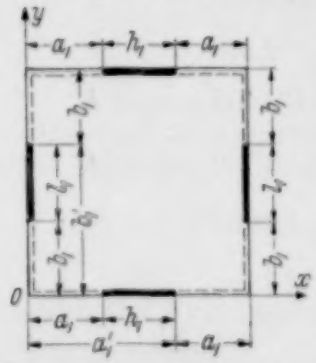


Fig. 7. Plate with each opposite edges clamped symmetrically at the middle portions.

9. Illustrative Example 2: Symmetrical bending of a simply supperted plate clamped along the middle portion of four edges. If each two opposite edges are partly clamped in symmetrical arrangement (see Fig. 7), i. e.

$$h_1 = \bar{h}_1\,, \qquad l_1 = \bar{l}_1$$

and moreover load distribution is symmetric, it can be written in (4.6) that

$$E_{s,1} = \bar{E}_{s,1} \equiv E_s\,, \qquad F_{s,1} = \bar{F}_{s,1} \equiv F_s\,.$$

In the above, it has been taken that $i=1$ since the number of the clamped portion on each edge is one. Then Eq. (6.7) becomes

$$\frac{l_1}{\pi}\sum_s s\,E_s\sum_n\{f_n'(0)+\bar{f}_n'(0)\}\,\Phi_{sn}(b,l_1)\,\Phi_{mn}(b,l_1)$$
$$+\frac{4\,b^2}{\pi\,a^2}\frac{h_1}{\pi}\sum_s s\,F_s\sum_n\sum_r\frac{(1-(-1)^r)\,r\,n}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\,\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mr}(b,l_1) = \sum_n B_n\,\Phi_{mn}(b,l_1)\,. \qquad (9.1)$$

Next, consider Eq. (6.8). It can be concluded that $\varphi_{x=0} = -\varphi_{x=a}$ owing to the symmetrical distortion of the deflection surface and then $\overline{B}_n = -B_n$ by (6.1). And, we may consider n = odd because a symmetric function generally can be represented by an odd series. From Table 1, evidently

$$f'_n(a) + \overline{f}'_n(a) = -[f'_n(0) + \overline{f}'_n(0)] .$$

Similarly, from the relation $a'_1 = a - a_1$, it can be derived that m, s = odd. Hence Eq. (6.8) comes to coincide with Eq. (9.1). Same considerations as before prove the coincidence of Eq. (6.9) and Eq. (6.10), and give the following expression:

$$\frac{h_1}{\pi}\sum_s s\,F_s \sum_n [g'_n(0) + \overline{g}'_n(0)]\,\Phi_{sn}(a, h_1)\,\Phi_{mn}(a, h_1) + \frac{4a^2}{\pi b^2}\frac{l_1}{\pi}\sum_s s\,E_s \sum_n \sum_r \frac{(1-(-1)^r)\,r\,n}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\,\Phi_{sn}(b, l_1)\,\Phi_{mr}(a, h_1) = \sum_n A_n\,\Phi_{mn}(a, h_1) . \qquad (9.2)$$

From the conditions $a'_1 = a - a_1$, $b'_1 = b - b_1$, $h_1 = a'_1 - a_1$, $l_1 = b'_1 - b_1$ the following expressions are obtained as in the previous example (see (8.3)):

$$\Phi_{mn}(a, h_1) = -2\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2 - \frac{h_1^2}{a^2}n^2}, \quad \text{when} \quad m + n = \text{even} ,$$

$$\Phi_{sn}(a, h_1) = -2\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{s^2 - \frac{h_1^2}{a^2}n^2}, \quad \text{when} \quad s + n = \text{even} ,$$

$$\Phi_{sr}(a, h_1) = -2\frac{\sin\frac{r\pi a_1}{a}}{s^2 - \frac{h_1^2}{a^2}r^2}, \quad \text{when} \quad s + r = \text{even} .$$

Then r also comes odd. Furthermore, the expressions for $\Phi_{mn}(b, l_1)$, $\Phi_{sn}(b, l_1)$, $\Phi_{sr}(b, l_1)$ etc. are made by replacing a_1, a, h_1 in each of the above expressions by b_1, b, l_1 respectively. Next referring to Table 1, it is known that

$$\left.\begin{aligned} f'_n(0) + \overline{f}'_n(0) &= \frac{\overline{\varrho}'_n}{n} , \\ g'_n(0) + \overline{g}'_n(0) &= \frac{\varrho'_n}{n} , \\ \overline{\varrho}'_n &= \beta_n - \tanh\beta_n\,(\beta_n \tanh\beta_n - 1) , \quad \beta_n = \frac{n\pi a}{2b} , \\ \varrho'_n &= \alpha_n - \tanh\alpha_n\,(\alpha_n \tanh\alpha_n - 1) , \quad \alpha_n = \frac{n\pi b}{2a} . \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

where

In the case of a uniformly distributed load, w' is given by (8.6) and then A_n in this case also is written in the same form as (8.8). In addition to this, considering the symmetrical properties of such a load, we can again use for w' the expression which is obtained from (8.6) by the transpositions (a, b) and (x, y). Hence the expression for B_n is also obtained from (8.8) by the same transpositions, that is

$$\left.\begin{aligned} A_n &= -\frac{2qa^3}{\pi^3 n^4}\varrho_n , & \varrho_n &= \alpha_n - \tanh\alpha_n\,(\alpha_n \tanh\alpha_n + 1) , \\ B_n &= -\frac{2qb^3}{\pi^3 n^4}\overline{\varrho}_n , & \overline{\varrho}_n &= \beta_n - \tanh\beta_n\,(\beta_n \tanh\beta_n + 1) . \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

From this, both the equations (9.1) and (9.2) are rewritten as follows:

$$\frac{l_1}{\pi}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{\bar{\varrho}_n'}{n}\Phi_{sn}(b,l_1)\,\Phi_{mn}(b,l_1) + \frac{8\,b^2 h_1}{\pi^2 a^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s F_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{[n\,\Phi_{sn}(a,h_1)]\,[r\,\Phi_{mr}(b,l_1)]}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}$$

$$= -\frac{2\,q\,b^3}{\pi^3}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\bar{\varrho}_n}{n^4}\Phi_{mn}(b,l_1)\,, \qquad (9.1)'$$

$$\frac{h_1}{\pi}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s F_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{\varrho_n'}{n}\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mn}(a,h_1) + \frac{8\,a^2 l_1}{\pi^2 b^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{[n\,\Phi_{sn}(b,l_1)]\,[r\,\Phi_{mr}(a,h_1)]}{\left(r^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}$$

$$= -\frac{2\,q\,a^3}{\pi^3}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n}{n^4}\Phi_{mn}(a,h_1)\,. \qquad (9.2)'$$

Especially, in the case when the plate is square and the clamped portions are equal to one another, i. e. $a = b$, $a_1 = b_1$, $h_1 = l_1$, it becomes that $\alpha_n = \beta_n = \frac{n\pi}{2}$ and then $\varrho_n = \bar{\varrho}_n$, $\varrho_n' = \bar{\varrho}_n'$. Hence, from (9.1)′ and (9.2)′, $E_s = F_s$ is derived. Thus both equations become identical and the conditional equation for this case is given as

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s E_s\left[\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n'}{n}\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mn}(a,h_1) + \frac{8}{\pi}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{n\,r}{(n^2+r^2)^2}\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mr}(a,h_1)\right]$$

$$= -\frac{2\,q\,a^3}{\pi^2 h_1}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n}{n^4}\Phi_{mn}(a,h_1) \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots). \qquad (9.5)$$

This represents an infinite set of linear equations with unknown $s E_s$, the coefficients of which are symmetric functions about s and m so that the matrix of such coefficients is symmetric. Now, the double series which appeared in (9.5) can be transformed into a single series. So granting, the numerical computation becomes far easier. The second term in brackets on the left hand side of (9.5) can be summed up with respect to r (or n). Let us consider this simplification below. In the first place, observing that the following relation holds:

$$\frac{1}{(r^2+n^2)^2\left(r^2-\frac{a^2}{h_1^2}m^2\right)} = \frac{1}{\left(n^2+\frac{a^2}{h_1^2}m^2\right)^2}\left(\frac{1}{r^2-\frac{a^2}{h_1^2}m^2}-\frac{1}{r^2+n^2}\right)-\frac{1}{\left(n^2+\frac{a^2}{h_1^2}m^2\right)(r^2+n^2)^2},$$

the series about r is transformed as follows:

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r}{(r^2+n^2)^2}\Phi_{mr}(a,h_1) = -2\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r\sin\frac{r\pi a_1}{a}}{(r^2+n^2)^2\left(m^2-\frac{h_1^2}{a^2}r^2\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{a}{h_1}\right)^2}{\left(n^2+\frac{a^2}{h_1^2}m^2\right)^2}\left(\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r}{r^2-\frac{a^2}{h_1^2}m^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a}-\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r}{r^2+n^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a}\right)$$

$$-\frac{2\left(\frac{a}{h_1}\right)^2}{n^2+\frac{a^2}{h_1^2}m^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r}{(r^2+n^2)^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a}\,. \qquad (9.6)$$

Next, the use of the following summation formulas of trigonometric series shall be made:

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\frac{r}{r^2-\lambda^2}\sin r\pi\xi = \frac{\pi}{4}\frac{\cos\pi\lambda\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}} \qquad (0<\xi<1)\,, \qquad (9.7)$$

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{r^2+\lambda^2}\sin r\pi\xi = \frac{\pi}{4}\frac{\cosh\pi\lambda\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\cosh\frac{\pi\lambda}{2}} \qquad (0<\xi<1)\,, \tag{9.8}$$

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{(r^2+\lambda^2)^2}\sin r\pi\xi = \frac{\pi^2}{8\lambda\cosh^2\frac{\pi\lambda}{2}}\left[\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi\lambda}{2}\cosh\pi\lambda\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\sinh\pi\lambda\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\cosh\frac{\pi\lambda}{2}\right] \qquad (0<\xi<1)\,. \tag{9.9}$$

By the substitution of $a_1=\frac{1}{2}(a-h_1)$ and the above formula (9.7), the first term in the large parenthesis on the right hand side of (9.6) is concluded to be

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{r^2-\frac{a^2}{h_1^2}m^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a} = \sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{r^2-\frac{a^2}{h_1^2}m^2}\sin\frac{r\pi}{2}\left(1-\frac{h_1}{a}\right) = \frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{m\pi a}{h_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{h_1}{2a}\right)}{\cos\frac{m\pi a}{2h_1}}$$
$$=\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{\cos\frac{m\pi}{2}\left(\frac{a}{h_1}\right)}=0 \qquad (m=\text{odd})\,.$$

And, the second term and the third term are respectively written by making use of (9.8), (9.9) as follows:

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{r^2+n^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a} = \frac{\pi}{4}\frac{\cosh\frac{n\pi h_1}{2a}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\,,$$

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{r}{(r^2+n^2)^2}\sin\frac{r\pi a_1}{a} = \frac{\pi^2}{16\,n\cosh^2\frac{n\pi}{2}}\left[\sinh\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi h_1}{2a}-\frac{h_1}{a}\sinh\frac{n\pi h_1}{2a}\cosh\frac{n\pi}{2}\right].$$

If these summation formulas are used, every series on the right hand side of (9.6) may be rewritten in the form of a sum. Thus it is seen that the double series on the left hand side of (9.5) finally is transformed into a single series about n. Hence we obtain the following equation for actual computation:

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' s\,E_s\left\{\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{\varrho_n'}{n}\frac{\sin^2\frac{n\pi a_1}{a}}{\left(m^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)\left(s^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)}+2\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{\left(s^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)\left(m^2+\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)}\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{n\left(\frac{h_1}{a}\right)^2}{\left(m^2+\frac{h_1^2}{a^2}n^2\right)}\frac{\cosh\frac{n\pi h_1}{2a}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}+\frac{\pi}{4}\left(\tanh\frac{n\pi}{2}\frac{\cosh\frac{n\pi h_1}{2a}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}-\frac{h_1}{a}\frac{\sinh\frac{n\pi h_1}{2a}}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{q\,a^3}{\pi^2 h_1}\sum_{(1.3.5\ldots)}{}' \frac{\varrho_n}{n^4}\frac{\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-\frac{h_1^2}{a^2}n^2} \qquad (m=1,3,5,\ldots) \tag{9.10}$$

where

$$\varrho_n=\frac{n\pi}{2}-\tanh\frac{n\pi}{2}\left(\frac{n\pi}{2}\tanh\frac{n\pi}{2}+1\right),$$

$$\varrho_n'=\frac{n\pi}{2}-\tanh\frac{n\pi}{2}\left(\frac{n\pi}{2}\tanh\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

Now, suppose a case where every clamped portion occupies respectively the middle section of one-third of the edge, i. e.

$$\frac{h_1}{a}=\frac{1}{3}\,, \qquad \frac{a_1}{a}=\frac{1}{3}\,.$$

Taking now the first twelve terms on the left hand side of Eq. (9.10) and calculating the coefficients with due consideration of the relation (8.9) in the previous example, we obtain a set of linear equations shown in Table 8 corresponding to $m = 1, 3, 5, \ldots, 23$.

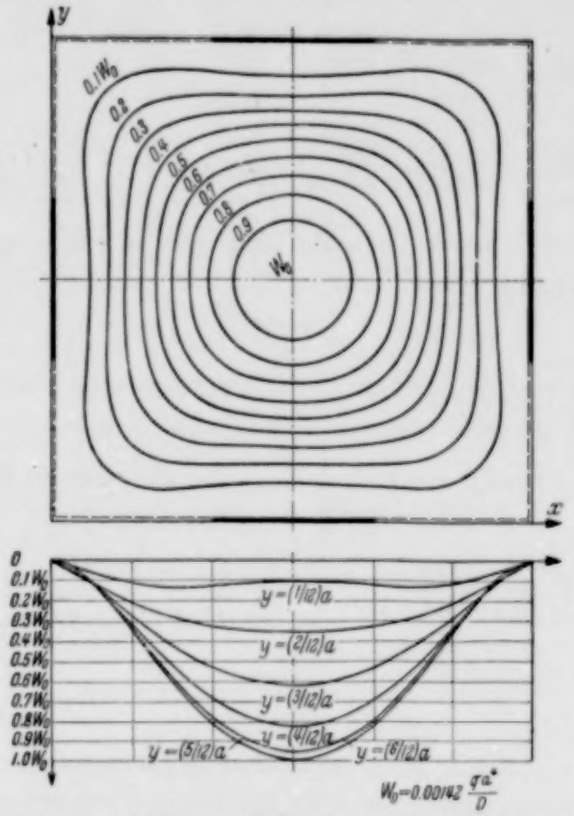


Fig. 8. Contour lines of deflection surface for the case when every middle portion of edges is clamped.

Solving this system of equations, we find

$$\begin{aligned}
E_1 &= -0.263541\,K,\\
3E_3 &= -0.354495\,K,\\
5E_5 &= -0.460605\,K,\\
7E_7 &= -0.565295\,K,\\
9E_9 &= -0.668501\,K,\\
11E_{11} &= -0.771339\,K,\\
13E_{13} &= -0.873405\,K,\\
15E_{15} &= -0.975489\,K,\\
17E_{17} &= -1.07905\,K,\\
19E_{19} &= -1.18236\,K,\\
21E_{21} &= -1.28153\,K,\\
23E_{23} &= -1.38701\,K
\end{aligned}$$

where

$$K = 3\frac{q\,a^2}{\pi^2}\,.$$

From (7.5), the deflection function in this case is now expressed in the form

$$\left.\begin{aligned} w &= w' + w''\\ \text{in which}\quad w'' &= w_{x_1} + w_{\bar{x}_1} + w_{y_1} + w_{\bar{y}_1}\,. \end{aligned}\right\} \quad (9.11)$$

Here, the deflection function of the simply supported plate w' is given by (8.6) as in the previous example, and the remaining four terms are expressed by (7.1) to (7.4) respectively. That is

$$w_{x_1} + w_{\bar{x}_1} = -\frac{l_1}{D\pi^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\left[f_n(x) + \bar{f}_n(x)\right]\sin\frac{n\pi y}{b}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,E_s\,\Phi_{sn}(b, l_1)\,,$$

$$w_{y_1} + w_{\bar{y}_1} = -\frac{h_1}{D\pi^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\left[g_n(y) + \bar{g}_n(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,F_s\,\Phi_{sn}(a, h_1)\,.$$

Since $E_s = F_s$, $a = b$, $h_1 = l_1$ in the present case, we get

$$\begin{aligned} w'' &= w_{x_1} + w_{\bar{x}_1} + w_{y_1} + w_{\bar{y}_1}\\ &= -\frac{h_1}{D\pi^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s\,E_s\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\Phi_{sn}(a, h_1)\left\{\left[f_n(x) + \bar{f}_n(x)\right]\sin\frac{n\pi y}{b} + \left[g_n(y) + \bar{g}_n(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\right\}, \end{aligned}$$

where $f_n(x) + \bar{f}_n(x)$, $g_n(y) + \bar{g}_n(y)$ are given in the item of Case (3), Table 1, and the computation of $\Phi_{sn}(a, h_1)$ requires the consideration of the relations (8.11)′. Thus, evaluating, by (9.11), the ratios of the deflections of some points to that of the center point as before, we have Table 9 and Fig. 8 in which the equi-deflection contours are shown.

The moments at the clamped sections are given by (4.6).

At the center of every section, i. e.

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{h}_1} = \frac{y_1}{l_1} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{l}_1} = \frac{1}{2}$$

such moments become

$$M_{y_1} = M_{\bar{y}_1} = M_{x_1} = M_{\bar{x}_1} = E_1 - E_3 + E_5 - E_7 + \cdots.$$

Table 8. *Array of Coefficients of Equations*

s / m	Left hand side of equations												Right hand side of Eqs.
	E_1	$3\,E_3$	$5\,E_5$	$7\,E_7$	$9\,E_9$	$11\,E_{11}$	$13\,E_{13}$	$15\,E_{15}$	$17\,E_{17}$	$19\,E_{19}$	$21\,E_{21}$	$23\,E_{23}$	$-\left(\frac{3\,q\,a^2}{\pi^3}\right)$
1	1.896101	0.147200	0.0535282	0.0274221	0.0166232	0.0111415	$^{2}0.0798319$	$^{2}0.0599940$	$^{2}0.0467256$	$^{2}0.0374167$	$^{2}0.0306355$	$^{2}0.0255434$	0.641506
3	0.147200	0.0410851	$^{2}0.0678837$	$^{2}0.0351629$	$^{2}0.0214492$	$^{2}0.014432$	$^{2}0.010368$	$^{3}0.07807$	$^{3}0.06088$	$^{3}0.04881$	$^{3}0.03999$	$^{3}0.03337$	0.0648958
5	0.0535282	$^{2}0.0678837$	$^{2}0.074931$	$^{2}0.013351$	$^{3}0.08183$	$^{3}0.05524$	$^{3}0.03978$	$^{3}0.03000$	$^{3}0.02343$	$^{3}0.01880$	$^{3}0.01542$	$^{3}0.01288$	0.0231840
7	0.0274221	$^{3}0.0351629$	$^{2}0.013351$	$^{2}0.024985$	$^{3}0.04307$	$^{3}0.02915$	$^{3}0.02104$	$^{3}0.01589$	$^{3}0.01243$	$^{4}0.09983$	$^{4}0.08194$	$^{4}0.06848$	0.0118044
9	0.0166232	$^{2}0.0214492$	$^{3}0.08183$	$^{3}0.04307$	$^{2}0.011118$	$^{3}0.01802$	$^{3}0.01303$	$^{4}0.09854$	$^{4}0.07713$	$^{4}0.06201$	$^{4}0.05094$	$^{4}0.04258$	$^{2}0.071347$
11	0.0111415	$^{2}0.014432$	$^{3}0.05524$	$^{3}0.02915$	$^{3}0.01802$	$^{3}0.05859$	$^{4}0.08864$	$^{4}0.06712$	$^{4}0.05261$	$^{4}0.04232$	$^{4}0.03478$	$^{4}0.02910$	$^{2}0.047741$
13	$^{2}0.0798319$	$^{2}0.010368$	$^{3}0.03978$	$^{3}0.02104$	$^{3}0.01303$	$^{4}0.08864$	$^{3}0.03450$	$^{4}0.04868$	$^{4}0.03818$	$^{4}0.03074$	$^{4}0.02529$	$^{4}0.02116$	$^{2}0.034172$
15	$^{2}0.0599940$	$^{3}0.07807$	$^{3}0.03000$	$^{3}0.01589$	$^{4}0.09854$	$^{4}0.06712$	$^{4}0.04868$	$^{3}0.02196$	$^{4}0.02899$	$^{4}0.02335$	$^{4}0.01941$	$^{4}0.01608$	$^{2}0.025663$
17	$^{2}0.0467256$	$^{3}0.06088$	$^{3}0.02343$	$^{3}0.01243$	$^{4}0.07713$	$^{4}0.05261$	$^{4}0.03818$	$^{4}0.02899$	$^{3}0.01483$	$^{4}0.01835$	$^{4}0.01510$	$^{4}0.01265$	$^{2}0.019978$
19	$^{2}0.0374167$	$^{3}0.04881$	$^{3}0.01880$	$^{4}0.09983$	$^{4}0.06201$	$^{4}0.04232$	$^{4}0.03074$	$^{4}0.02335$	$^{4}0.01835$	$^{3}0.01047$	$^{4}0.01218$	$^{4}0.01019$	$^{2}0.015992$
21	$^{2}0.0306355$	$^{3}0.03999$	$^{3}0.01542$	$^{4}0.08194$	$^{4}0.05094$	$^{4}0.03478$	$^{4}0.02529$	$^{4}0.01941$	$^{4}0.01510$	$^{4}0.01218$	$^{4}0.07665$	$^{5}0.0843$	$^{2}0.013090$
23	$^{2}0.0255434$	$^{3}0.03337$	$^{3}0.01288$	$^{4}0.06848$	$^{4}0.04258$	$^{4}0.02910$	$^{4}0.02116$	$^{4}0.01608$	$^{4}0.01265$	$^{4}0.01019$	$^{5}0.0843$	$^{4}0.05776$	$^{2}0.010912$

Note: In the table, $^{3}0.03450$, for example, means 0.0003450.

Table 9. *Distribution of Deflection*

x/a \ y/b	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12
1/12	0.0604	0.1086	0.1332	0.1273	0.1170	0.1164
2/12	0.1086	0.2088	0.2857	0.3309	0.3523	0.3600
3/12	0.1332	0.2857	0.4273	0.5326	0.5953	0.6154
4/12	0.1273	0.3309	0.5326	0.6910	0.7899	0.8229
5/12	0.1170	0.3523	0.5953	0.7899	0.9134	0.9547
6/12	0.1164	0.3600	0.6154	0.8229	0.9547	1.0000

The computation of the above alternating series by *Euler*'s method as before gives

$$M_{y_1} = M_{x_1} = -0.05931\, q\, a^2$$

In the next place, let us consider the bending moment at the center point of the plate $\left(\frac{x}{a} = \frac{1}{2},\ \frac{y}{b} = \frac{1}{2}\right)$, observing that the following holds:

$$A \equiv \left| \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right|_{x=\frac{a}{2} \quad y=\frac{b}{2}} = \left| \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right|_{x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}} = \frac{2 h_1}{D \pi a} \sum_{(1.3.5\ldots)}^{s} s E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\cosh \frac{n\pi}{2}}$$

$$\times \Phi_{sn}(a, h_1) = 0{,}0184 \frac{q\, a^2}{D},$$

and taking the *Poisson*'s ratio $\nu = 0.3$, we can write the bending moment in the interior due to the clamping moments along the edge as

$$M_x'' = M_y'' = -D\,(A + 0{,}3\, A) = -0{,}0239\, q\, a^2 .$$

Therefore, the required moments M_x, M_y of this plate at the center are given by the method of superposition as follows:

$$M_x = M_y = M_x' + M_x'' = (0{,}0479 - 0{,}0239)\, q\, a^2 \doteq 0{,}024\, q\, a^2 .$$

10. Illustrative Example 3: Symmetrica bending of a simply supported plate clamped in the neighbourhood of every corner. If each two opposite edges are partly clamped in symmetrical arrangement (see Fig. 9), i. e.

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= h_2 = \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \equiv h\,, \\ l_1 &= l_2 = \bar{l}_1 = \bar{l}_2 \equiv l \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

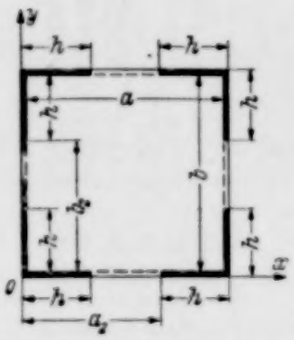


Fig. 9. Plate clamped near every corner.

and load distribution is also symmetric, the clamping moments must be distributed symmetrically on the two opposite edges. It can be, then, written in (4.6) that

$$\left.\begin{aligned} E_{s,1} &= \bar{E}_{s,1} \equiv E_s\,, & F_{s,1} &= \bar{F}_{s,1} \equiv F_s\,, \\ E_{s,2} &= \bar{E}_{s,2} \equiv E_s'\,, & F_{s,2} &= \bar{F}_{s,2} \equiv F_s'\,. \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Accordingly, such moments on the edge $x = 0$, for example, are expressed as:

$$M_{x_1} = \sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} E_s \sin \frac{s\pi y_1}{l}\,, \qquad M_{x_2} = \sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} E_s' \sin \frac{s\pi y_2}{l}\,.$$

The case considered now is such that the distribution of the clamping moments is also symmetric about the center point of one edge. From this, it can be taken that $M_{x_1} = M_{x_2}$, if $y_2 = h - y_1$. That is

$$M_{x_1} - M_{x_2} = \sum_s E_s \sin \frac{s\pi y_1}{l} - \sum_s E_s' \sin \frac{s\pi (h - y_1)}{l} = \sum_s [E_s - (-1)^{s-1} E_s'] \sin \frac{s\pi y_1}{l} = 0\,.$$

Hence we have

$$\left.\begin{aligned} E_s &= (-1)^{s-1} E_s' \quad \text{or} \quad E_s' = (-1)^{s-1} E_s \\ \text{and similarly} \\ F_s &= (-1)^{s-1} F_s' \quad \text{or} \quad F_s' = (-1)^{s-1} F_s \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Next, owing to the symmetrical properties of the load distribution, slope displacements come to be distributed in a symmetrical manner. It can, therefore, be concluded that $n =$ odd in (6.2) to (6.5). Further, since the relations; $\varphi_{x=0} = -\varphi_{x=a}$, $\varphi_{y=0} = -\varphi_{y=b}$ must hold, it is easily seen that

$$B_n = -\bar{B}_n\,, \qquad A_n = -\bar{A}_n \qquad (n = \text{odd})\,. \tag{10.4}$$

Let us write down the actual expression by (6.7). Considering that the number of clamped sections is two to every edge, i. e., $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$, we have the following two equations:

$$\frac{l_1}{\pi}\sum_s s\,E_{s,1}\sum_n f_n'(0)\,\Phi_{sn}(b,l_1)\,\Phi_{mn}(b,l_j)+\frac{l_2}{\pi}\sum_s s\,E_{s,2}\sum_n f_n'(0)\,\Phi_{sn}(b,l_2)\,\Phi_{mn}(b,l_j)$$

$$+\frac{\bar{l}_1}{\pi}\sum_s s\,\bar{E}_{s,1}\sum_n \bar{f}_n'(0)\,\Phi_{sn}(b,\bar{l}_1)\,\Phi_{mn}(b,l_j)+\frac{\bar{l}_2}{\pi}\sum_s s\,\bar{E}_{s,2}\sum_n \bar{f}_n'(0)\,\Phi_{sn}(b,\bar{l}_2)\,\Phi_{mn}(b,l_j)$$

$$+\frac{4h_1b^2}{\pi^2a^2}\sum_s s\,F_{s,1}\sum_n\sum_r \frac{nr}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mr}(b,l_j)$$

$$+\frac{4h_2b^2}{\pi^2a^2}\sum_s s\,F_{s,2}\sum_n\sum_r \frac{nr}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\Phi_{sn}(a,h_2)\,\Phi_{mr}(b,l_j)$$

$$+\frac{4\bar{h}_1b^2}{\pi^2a^2}\sum_s s\,\bar{F}_{s,1}\sum_n\sum_r \frac{(-1)^{r-1}nr}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\Phi_{sn}(a,\bar{h}_1)\,\Phi_{mr}(b,l_j)$$

$$+\frac{4\bar{h}_2b^2}{\pi^2a^2}\sum_s s\,\bar{F}_{s,2}\sum_n\sum_r \frac{(-1)^{r-1}nr}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\Phi_{sn}(a,\bar{h}_2)\,\Phi_{mr}(b,\bar{l}_j)$$

$$=\sum_n B_n\,\Phi_{mn}(b,l_j)\qquad (m=1,2,3,\ldots)\qquad (j=1,2)\,. \tag{10.5}$$

The other equations (6.8), (6.9), (6.10) may also be written in the same form. We now proceed to investigate the form of the expression Φ. From (10.1)

$$b_1 = \bar{b}_1 = 0\,,\qquad b_1' = \bar{b}_1' = l\,,\qquad b_2 = \bar{b}_2 = b - l\,,\qquad b_2' = \bar{b}_2' = b$$

and then the following expressions are obtained from (4.8):

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{sn}(b,l_1)=\Phi_{sn}(b,\bar{l}_1)&=(-1)^s\frac{\sin\frac{n\pi l}{b}}{s^2-\frac{l^2}{b^2}n^2}\,,\\ \Phi_{sn}(b,l_2)=\Phi_{sn}(b,\bar{l}_2)&=(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi l}{b}}{s^2-\frac{l^2}{b^2}n^2}\,,\\ \text{and then}\qquad \Phi_{sn}(b,l_2)&=(-1)^{n+s}\,\Phi_{sn}(b,l_1)\,.\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

A similar expression for Φ_{mn} is also obtained from the above by changing s for m. Moreover, $\Phi_{sn}(a,h_1)$, $\Phi_{sn}(a\,\bar{h}_1)$, $\Phi_{sn}(a,h_2)$, $\Phi_{sn}(a\,\bar{h}_2)$ and so on are expressed by similar expressions as before, if $b, l_1, l_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2, l$ in (10.6) are replaced by $a, h_1, h_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2, h$ respectively. Thus, by taking into account the foregoing relations (10.1) to (10.6), rewriting (10.5) gives

$$\frac{l}{\pi}\sum_s s\,E_s\sum_n [1-(-1)^n]\,[f_n'(0)+\bar{f}_n'(0)]\,\Phi_{sn}(b,l_1)\,\Phi_{mn}(b,l_j)$$

$$+\frac{4hb^2}{\pi^2a^2}\sum_s s\,F_s\sum_r\sum_n \frac{[1-(-1)^r]\,[1-(-1)^n]\,rn}{\left(r^2+\frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}\Phi_{sn}(a,h_1)\,\Phi_{mr}(b,l_j)$$

$$=\sum_n B_n\,\Phi_{mn}(b,l_j)\qquad (m=1,2,3,\ldots)\quad (j=1,2)\,, \tag{10.5}'$$

or

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} s E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{\bar{\varrho}_n'}{n}\Phi_{sn}(b, l_1)\,\Phi_{mn}(b, l_j) + \frac{16\,h\,b^2}{\pi^2 a^2}\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} s F_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{[n\,\Phi_{sn}(a, h_1)]\,[r\,\Phi_{mr}(b, l_j)]}{\left(r^2 + \frac{b^2}{a^2}n^2\right)^2}$$

$$= \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} B_n\,\Phi_{mn}(b, l_j) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)\quad (j = 1, 2)\,. \tag{10.5}''$$

And also, considering the relations (10.4), (10.6) and

$$f_n'(a) + \bar{f}_n'(a) = -[f_n'(0) + \bar{f}_n'(0)] = -\frac{\bar{\varrho}_n'}{n}\,.$$

Eq. (6.8) also is reduced to Eq. (10.5)'' in the same manner as Eq. (6.7). On the other hand, the same consideration as above gives the following equation with the coincidence of both the equations (6.9) and (6.10):

$$\frac{2h}{\pi}\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s}{}' s F_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{\varrho_n'}{n}\Phi_{sn}(a, h_1)\,\Phi_{mn}(a, h_j) + \frac{16\,l\,a^2}{\pi^2 b^2}\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s}{}' s E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{[n\,\Phi_{sn}(b, l_1)]\,[r\,\Phi_{mr}(a, h_j)]}{\left(r^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}$$

$$= \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} A_n\,\Phi_{mn}(a, h_j) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)\quad (j = 1, 2)\,, \tag{10.7}$$

where ϱ_n', $\bar{\varrho}_n'$ are given by (9.3) in the previous example. Though Eqs. (10.5)'' and (10.7) alike represent two cases when $j = 1$ or 2, these cases again come to coincide with each other by means of the relation (10.6). Conditional equations for this example, therefore, can be represented by the two systems of equations which are derived from (10.5)'' and (10.7) by putting $h_j = h_1$, $l_j = l_1$.

Especially, in the case when the plate is aquare and the clamped portions are equal to one another, i. e. $a = b$, $h_1 = l_1$, we have, referring to (9.3)

$$\varrho_n' = \bar{\varrho}_n' = \frac{n\pi}{2} - \tanh\frac{n\pi}{2}\left(\frac{n\pi}{2}\tanh\frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

If such a plate, moreover, is subjected to a uniformly distributed load, the intensity of which is q, the expressions already referred in (9.4) become

$$A_n = B_n = -\frac{2\,q\,a^3}{\pi^3 n^4}\varrho_n\,,$$

$$\varrho_n = \bar{\varrho}_n = \frac{n\pi}{2} - \tanh\frac{n\pi}{2}\left(\frac{n\pi}{2}\tanh\frac{n\pi}{2} + 1\right).$$

Then the combination of Eqs. (10.5)'' and (10.7) yields $E_s = F_s$ and accordingly both equations become one and the same. Thus the conditional equations for this case are reduced into one system of equations as follows:

$$\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} s E_s\left[\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n'}{n}\Phi_{sn}(a, h_1)\,\Phi_{mn}(a, h_1) + \frac{8}{\pi}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{r}{}' \frac{n\,r}{(n^2 + r^2)^2}\Phi_{sn}(a, h_1)\,\Phi_{mr}(a, h_1)\right]$$

$$= -\frac{q\,a^3}{\pi^2 h_1}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n}{n^4}\Phi_{mn}(a, h_1) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{10.8}$$

Comparing this equation with Eq. (9.5), we find that the form of the equation is similar to the previous one and their coefficients again constituting a symmetric matrix of infinite elements. Here, the second term in the brackets on the left hand side of (10.8) can be reduced to a single series as in the previous example. Let us now consider this point. However, it will be mentioned

that this case differs from the previous example on the point where the index m here follows natural numbers, and about the form of $\Phi_{mr}(a, h_1)$ and so on. First, we have as in the preceding case

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{(r^2+n^2)^2}\Phi_{mr}(a,h_1) = (-1)^m \sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r\sin\frac{r\pi h}{a}}{(r^2+n^2)^2\left(m^2-\frac{h^2}{a^2}r^2\right)}$$

$$= -\frac{(-1)^m\left(\frac{a}{h}\right)^2}{\left(n^2+\frac{a^2}{h^2}m^2\right)^2}\left[\sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{r^2-\frac{a^2}{h^2}m^2}\sin\frac{r\pi h}{a} - \sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{r^2+n^2}\sin\frac{r\pi h}{a}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^m\left(\frac{a}{h}\right)^2}{\left(n^2+\frac{a^2}{h^2}m^2\right)} \sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{(r^2+n^2)^2}\sin\frac{r\pi h}{a} \tag{10.9}$$

and, by the formulas (9.7), (9.8), (9.9)

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{r^2-\frac{a^2}{h^2}m^2}\sin\frac{r\pi h}{a} = \frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{m\pi a}{h}\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)}{\cos\frac{m\pi a}{2h}} = \frac{\pi}{4}\cos m\pi = (-1)^m\frac{\pi}{4} \quad (m=1,2,3,\ldots),$$

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{r^2+n^2}\sin\frac{r\pi h}{a} = \frac{\pi}{4}\frac{\cosh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)}{\cosh\frac{n\pi}{2}},$$

$$\sum_{(1.3.5\ldots)}' \frac{r}{(r^2+n^2)^2}\sin\frac{r\pi h}{a} = \frac{\pi^2}{8n\cosh^2\frac{n\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\sinh\frac{n\pi}{2}\cosh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)\sinh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)\cosh\frac{n\pi}{2}\right].$$

Making use of the above expressions, every series on the right hand side of (10.9) can be summed up in closed forms. Therefore, referring to the expression of (10.9) thus obtained, the double series in the brackets of (10.8) is reduced into a single series, so that we obtain

$$\sum_{(1.2.3\ldots)}^{s}(-1)^{s-1}sE_s\left\{\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n'}{n}\frac{\sin^2\frac{n\pi h}{a}}{\left(m^2-\frac{h^2}{a^2}n^2\right)\left(s^2-\frac{h^2}{a^2}n^2\right)} + 2\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\sin\frac{n\pi h}{a}}{\left(s^2-\frac{h^2}{a^2}n^2\right)\left(m^2+\frac{h^2}{a^2}n^2\right)}\right.$$

$$\times\left[\frac{n\left(\frac{h}{a}\right)^2}{\left(m^2+\frac{h^2}{a^2}n^2\right)}\frac{\cosh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)}{\cosh\frac{n\pi}{2}} + \frac{\pi}{4}\left(\tanh\frac{n\pi}{2}\frac{\cosh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -2\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)\frac{\sinh n\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{a}\right)}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\right)\right] - (-1)^m 2\frac{h^2}{a^2}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{n\sin\frac{n\pi h}{a}}{\left(s^2-\frac{h^2}{a^2}n^2\right)\left(m^2+\frac{h^2}{a^2}n^2\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{qa^3}{\pi^2 h}\sum_{(1.3.5\ldots)}^{n}\frac{\varrho_n}{n^4}\frac{\sin\frac{n\pi h}{a}}{\left(m^2-\frac{h^2}{a^2}n^2\right)} \qquad (m=1,2,3,\ldots).$$

In the coefficients of $(-1)^{s-1}\, s\, E_s$ on the left hand side of the above equation, the series

$$\sum_{\substack{n \\ (1.3.5\ldots)}} \frac{n \sin \frac{n\pi h}{a}}{\left(m^2 + \frac{h^2}{a^2} n^2\right)^2 \left(s^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2\right)}$$

again appears. This series, however, is of the same form as (10.9) and then can be summed up in closed form as before. The foregoing equation, eventually, is rewritten in the following form for actual computation:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{s \\ (1.2.3\ldots)}} (-1)^{-1}\, s\, E_s \Bigg\{ & \sum_{\substack{n \\ (1.3.5\ldots)}} \frac{\varrho_n'}{n} \frac{\sin^2 \frac{n\pi h}{a}}{\left(s^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2\right)\left(m^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2\right)} + \sum_{\substack{n \\ (1.3.5\ldots)}} \frac{\sin \frac{n\pi h}{a}}{\left(s^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2\right)\left(m^2 + \frac{h^2}{a^2} n^2\right)} \\
& \times \Bigg[\frac{2n\left(\frac{h}{a}\right)^2}{\left(m^2 + \frac{h^2}{a^2} n^2\right)} \frac{\cosh n\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{n\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \tanh \frac{n\pi}{2} \frac{\cosh n\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \\
& - \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right) \frac{\sinh n\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \Bigg] - \frac{(-1)^m \pi}{4m(s^2 + m^2)} \frac{a}{h} \\
& \times \Bigg[\frac{2m \frac{h}{a}}{(s^2 + m^2)} \frac{\cosh \frac{am\pi}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{am\pi}{2h}} + \frac{\pi}{2} \tanh \frac{am\pi}{2h} \frac{\cosh \frac{am\pi}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{am\pi}{2h}} \\
& - \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right) \frac{\sinh \frac{am\pi}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right)}{\cosh \frac{am\pi}{2h}} \Bigg] + (-1)^{s+m} \frac{\pi}{2(s^2 + m^2)^2} \Bigg\} \\
= & \frac{q a^3}{\pi^2 h} \sum_{\substack{n \\ (1.3.5\ldots)}} \frac{\varrho_n}{n^4} \frac{\sin \frac{n\pi h}{a}}{\left(m^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2\right)} \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots\ldots) . \qquad (10.10)
\end{aligned}$$

Let us now consider the case of a square plate when every clamped edge occupies a one-third section of the edge from the corner, i. e.

$$a = b , \qquad \frac{h}{a} = \frac{l}{b} = \frac{1}{3} .$$

Putting $h/a = \varkappa$, we have

$$\lim_{\varkappa \to \frac{m}{n}} \frac{\sin \frac{n\pi h}{a}}{m^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2} = \lim_{\varkappa \to \frac{m}{n}} \frac{1}{n^2} \frac{\sin n\pi\varkappa}{\frac{m^2}{n^2} - \varkappa^2} = -\frac{\pi}{2m} \cos m\pi = (-1)^{m-1} \frac{\pi}{2m}$$

for the case when $\varkappa = m/n$, while $m/n = h/a = 1/3$, from this $3m = n \equiv$ odd, and so $(-1)^{m-1} = 1$. Therefore, we find

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin \frac{n\pi h}{a}}{m^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2} &= \frac{\pi}{2m} , \qquad \text{when} \qquad \frac{h}{a} = \frac{m}{n} , \\
\frac{\sin \frac{n\pi h}{a}}{s^2 - \frac{h^2}{a^2} n^2} &= \frac{\pi}{2s} , \qquad \text{when} \qquad \frac{h}{a} = \frac{s}{n} .
\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Taking the first twelve terms on the left hand side of Eq. (10.10) and calculating the coefficients with due consideration of the above relationships, we obtain a set of linear equations shown in Table 10.

Solving of these equations yields the following values for the coefficients:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -\,0.145\,116\,K\,, \\ 2\,E_2 &= \,0.175\,792\,K\,, \\ 3\,E_3 &= -\,0.283\,054\,K\,, \\ 4\,E_4 &= \,0.261\,104\,K\,, \\ 5\,E_5 &= -\,0.426\,766\,K\,, \\ 6\,E_6 &= \,0.351\,335\,K\,, \\ 7\,E_7 &= -\,0.569\,818\,K\,, \\ 8\,E_8 &= \,0.440\,141\,K\,, \\ 9\,E_9 &= -\,0.714\,955\,K\,, \\ 10\,E_{10} &= \,0.521\,064\,K\,, \\ 11\,E_{11} &= -\,0.862\,293\,K\,, \\ 12\,E_{12} &= \,0.611\,202\,K\,, \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

with

$$K = 3\,\frac{q\,a^2}{\pi^2}\,.$$

If the first eighteen terms are taken in Eq. (10.10), the following values are obtained:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -\,0.140\,670\,K\,, \\ 2\,E_2 &= \,0.167\,539\,K\,, \\ 3\,E_3 &= -\,0.263\,596\,K\,, \\ 4\,E_4 &= \,0.242\,315\,K\,, \\ 5\,E_5 &= -\,0.386\,810\,K\,, \\ 6\,E_6 &= \,0.321\,474\,K\,, \\ 7\,E_7 &= -\,0.505\,545\,K\,, \\ 8\,E_8 &= \,0.399\,458\,K\,, \\ 9\,E_9 &= -\,0.624\,289\,K\,, \\ 10\,E_{10} &= \,0.470\,231\,K\,, \\ 11\,E_{11} &= -\,0.743\,614\,K\,, \\ 12\,E_{12} &= \,0.547\,844\,K\,, \\ 13\,E_{13} &= -\,0.864\,233\,K\,, \\ 14\,E_{14} &= \,0.620\,865\,K\,, \\ 15\,E_{15} &= -\,1.034\,824\,K\,, \\ 16\,E_{16} &= \,0.672\,343\,K\,, \\ 17\,E_{17} &= -\,1.112\,873\,K\,, \\ 18\,E_{18} &= \,0.776\,523\,K\,, \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

with

$$K = 3\,\frac{q\,a^2}{\pi^2}\,.$$

Table 10. *Array of Coefficients of Equations*

s / m	Left hand side of equations												Right hand side of Eqs.
	E_1	$-2\,E_2$	$3\,E_3$	$-4\,E_4$	$5\,E_5$	$-6\,E_6$	$7\,E_7$	$-8\,E_8$	$9\,E_9$	$-10\,E_{10}$	$11\,E_{11}$	$-12\,E_{12}$	$-\left(\frac{3\,q\,a^2}{\pi^2}\right)$
1	3.057701	0.289925	0.175205	0.0849458	0.0604108	0.0392969	0.0303950	0.0224468	0.0182797	0.0144735	0.0122009	0.0100931	0.670546
2	0.289925	0.367629	0.0301191	0.0264094	0.0126470	0.0111201	$\overset{2}{0}.069198$	$\overset{2}{0}.060829$	$\overset{2}{0}.043307$	$\overset{2}{0}.038357$	$\overset{2}{0}.029567$	$\overset{2}{0}.026409$	0.147303
3	0.175205	0.0301191	0.0687876	$\overset{2}{0}.079600$	$\overset{2}{0}.081492$	$\overset{2}{0}.039817$	$\overset{2}{0}.039843$	$\overset{2}{0}.024109$	$\overset{2}{0}.023396$	$\overset{2}{0}.016107$	$\overset{2}{0}.015365$	$\overset{2}{0}.011482$	0.0650155
4	0.0849458	0.0264094	$\overset{2}{0}.079600$	0.0396969	$\overset{2}{0}.029902$	$\overset{2}{0}.033369$	0.016694	$\overset{2}{0}.018178$	$\overset{2}{0}.010814$	$\overset{2}{0}.011317$	$\overset{3}{0}.07576$	$\overset{3}{0}.07901$	0.0362865
5	0.0604108	0.0126470	$\overset{2}{0}.081492$	$\overset{2}{0}.029902$	0.0130561	$\overset{2}{0}.013775$	$\overset{2}{0}.016218$	$\overset{3}{0}.08313$	$\overset{3}{0}.09581$	$\overset{3}{0}.05654$	$\overset{3}{0}.06259$	$\overset{3}{0}.04105$	0.0231933
6	0.0392969	0.0111201	$\overset{2}{0}.039817$	$\overset{2}{0}.033369$	$\overset{2}{0}.013775$	0.0110904	$\overset{3}{0}.07242$	$\overset{3}{0}.08841$	$\overset{3}{0}.04636$	$\overset{3}{0}.05559$	$\overset{3}{0}.03271$	$\overset{3}{0}.03781$	0.0160761
7	0.0303950	$\overset{2}{0}.069198$	$\overset{2}{0}.039843$	$\overset{2}{0}.016694$	$\overset{2}{0}.016218$	$\overset{3}{0}.07242$	$\overset{2}{0}.044606$	$\overset{3}{0}.04180$	$\overset{3}{0}.05237$	$\overset{3}{0}.02802$	$\overset{3}{0}.03456$	$\overset{3}{0}.02037$	0.0118061
8	0.0224468	$\overset{2}{0}.060829$	$\overset{2}{0}.024109$	$\overset{2}{0}.018178$	$\overset{3}{0}.08313$	$\overset{3}{0}.08841$	$\overset{3}{0}.04180$	$\overset{2}{0}.045302$	$\overset{3}{0}.02590$	$\overset{3}{0}.03302$	$\overset{3}{0}.01798$	$\overset{3}{0}.02269$	$\overset{2}{0}.090322$
9	0.0182797	$\overset{2}{0}.043307$	$\overset{2}{0}.023396$	$\overset{2}{0}.010814$	$\overset{3}{0}.09581$	$\overset{3}{0}.04636$	$\overset{3}{0}.05237$	$\overset{3}{0}.02590$	$\overset{2}{0}.020179$	$\overset{3}{0}.01680$	$\overset{3}{0}.02184$	$\overset{3}{0}.01209$	$\overset{2}{0}.071352$
10	0.0144735	$\overset{2}{0}.038357$	$\overset{2}{0}.016107$	$\overset{2}{0}.011317$	$\overset{3}{0}.05654$	$\overset{3}{0}.05559$	$\overset{3}{0}.02802$	$\overset{3}{0}.03302$	$\overset{3}{0}.01680$	$\overset{2}{0}.023012$	$\overset{3}{0}.01145$	$\overset{3}{0}.01503$	$\overset{2}{0}.057774$
11	0.0122009	$\overset{2}{0}.029567$	$\overset{2}{0}.015365$	$\overset{3}{0}.07576$	$\overset{3}{0}.06259$	$\overset{3}{0}.03271$	$\overset{3}{0}.03456$	$\overset{3}{0}.01798$	$\overset{3}{0}.02184$	$\overset{3}{0}.01145$	$\overset{2}{0}.010758$	$\overset{4}{0}.0810$	$\overset{2}{0}.047741$
12	0.0100931	$\overset{2}{0}.026409$	$\overset{2}{0}.011482$	$\overset{3}{0}.07901$	$\overset{3}{0}.04105$	$\overset{3}{0}.03781$	$\overset{3}{0}.02037$	$\overset{3}{0}.02269$	$\overset{3}{0}.01209$	$\overset{3}{0}.01503$	$\overset{4}{0}.0810$	$\overset{2}{0}.012960$	$\overset{3}{0}.040109$

Note " In the table, $\overset{1}{0}.044606$, for example, means 0.0044606.

The deflection function w is expressed from (7.5) as follows:

$$\left.\begin{aligned} w &= w' + w'' , \\ w'' &= (w_{x_1} + w_{\bar{x}_1}) + (w_{x_2} + w_{\bar{x}_2}) + (w_{y_1} + w_{\bar{y}_1}) + (w_{y_2} + w_{\bar{y}_2}) \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

where w' is given by (8.6) and every term of w'' by (7.1) to (7.4), and then the arrangement with (10.1), (10.2), (10.6), $a = b$, $h = l$, $\frac{h}{a} = \frac{l}{b} = \frac{1}{3}$ etc. yields

$$w'' = -\frac{2h}{D\pi^2} \sum_{(1.2.3\ldots)}^{s} (-1)^s \, s \, E_s \sum_{(1.3.5\ldots)}^{n} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{s^2 - \frac{n^2}{9}} \left[(f_n(x) + \bar{f}_n(x)) \sin\frac{n\pi y}{b} + (g_n(y) + \bar{g}_n(y)) \sin\frac{n\pi x}{a} \right].$$

In the above, the expressions $f_n(x) + \bar{f}_n(x)$ and $g_n(y) + \bar{g}_n(y)$ have already been given in Table 1. Thus we can evaluate deflection w by (10.14), using the values of (10.12) or (10.13). The actual evaluation in this manner gives the following values at the center point of the plate:

$$w_0 = 0.00196 \frac{q a^4}{D} , \qquad \text{when the values of (10.12) are used,}$$

$$w_0 = 0.00195 \frac{q a^4}{D} , \qquad \text{when the values of (10.13) are used,}$$

so that we find that both the above two cases give practically the same value. Table 11 gives the ratios of deflections to that of the center point and Fig. 10 represents the equi-deflection contours as in the foregoing examples.

Table 11. *Distribution of Deflection*

x/a \ y/b	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12
1/12	0.0073	0.0426	0.0873	0.1452	0.2019	0.2232
2/12	0.0426	0.1359	0.2432	0.3451	0.4230	0.4524
3/12	0.0873	0.2432	0.4037	0.5403	0.6342	0.6682
4/12	0.1452	0.3451	0.5403	0.7009	0.8075	0.8441
5/12	0.2019	0.4230	0.6342	0.8075	0.9207	0.9594
6/12	0.2232	0.4524	0.6682	0.8441	0.9594	1.0000

The clamping moments are also given by (4.6). At the center point of every clamped section, i. e.

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{h}_1} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{h}_2} = \frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{l}_1} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{l}_2} = \frac{1}{2} ,$$

we have

$$M_{y_1} = M_{y_2} = M_{\bar{y}_1} = M_{\bar{y}_2} = M_{x_1} = M_{x_2} = M_{\bar{x}_1} = M_{\bar{x}_2} = E_1 - E_3 + E_5 - E_7 + E_9 - \cdots$$

Evaluating such a series by *Euler*'s method of summation, the following results are obtained:

$$M_{y_1} = 0.0288 \, q a^2 , \qquad \text{when the coefficients of (10.12) are used,}$$
$$M_{y_1} = 0.0283 \, q a^2 , \qquad \text{when the coefficients of (10.13) are used.}$$

For the point $\frac{x_1}{h_1} = \frac{1}{4}$, the expression (4.6) may be arranged as

$$M_{y_1} = 0.70711 \, A + B$$

where

$$A = (E_1 + E_3) - (E_5 + E_7) + (E_9 + E_{11}) - \cdots ,$$
$$B = E_2 - E_6 + E_8 - E_{10} + E_{12} - \cdots .$$

In this case, such A, B can be evaluated by the *Euler*'s method. Using (10.12) gives:

$$A = -0.146 \left(3 \frac{q a^2}{\pi^2} \right) , \qquad B = 0.054 \left(3 \frac{q a^2}{\pi^2} \right)$$

and using (10.13) also gives the same values. Thus, we get

$$M_{y_1} = -0.049\left(3\frac{q\,a^2}{\pi^2}\right) = -0.0149\,q\,a^2\,.$$

And for the point $\frac{x_1}{h_1} = \frac{3}{4}$, the following representation and the numerical result may be obtained

$$M_{y_1} = 0.70711\,A - B = -0.0478\,q\,a^2\,.$$

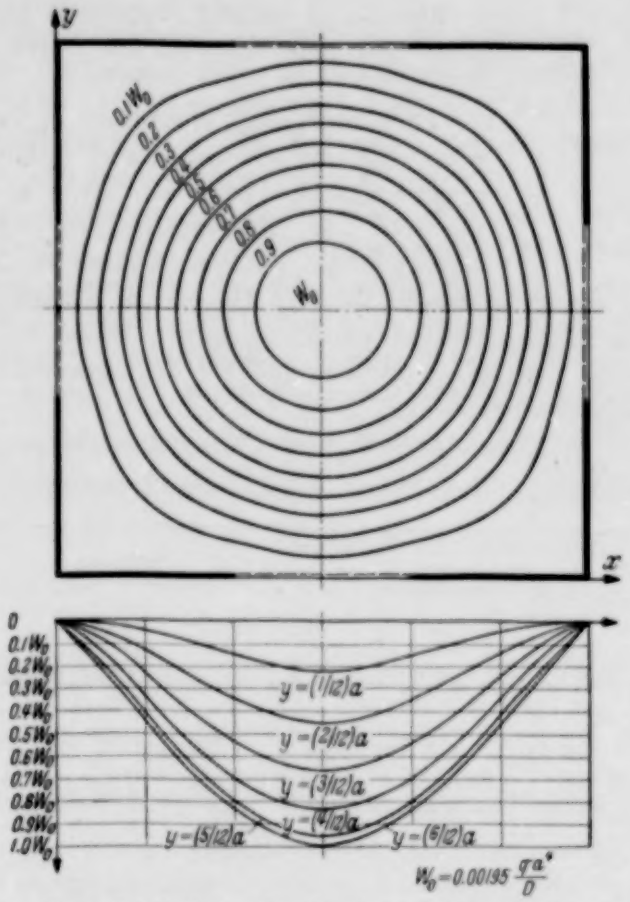


Fig. 10. Contour lines of deflection surface for the case when every corner is clamped.

Next, let us consider the bending moments at the center point of the plate $\left(\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\,,\ \frac{y}{b} = \frac{1}{2}\right)$. Using the values (10.12), it can be written that

$$C \equiv \left|\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2}\right|_{x=\frac{a}{2}\,,\ y=\frac{b}{2}} = \left|\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2}\right|_{x=\frac{a}{2}\,,\ y=\frac{b}{2}} = \frac{4\,h}{D\,\pi\,a}\sum_{(1.2.3\ldots)} s\,E_s \sum_{(1.3.5\ldots)} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\cosh\frac{n\,\pi}{2}}\,\Phi_{s\,n}(a, h_1)$$

$$= 0.0141\,\frac{q\,a^2}{D}\,.$$

Taking the *Poisson*'s ratio $\nu = 0.3$, the negative moments M_x'', M_y'' at the center point caused by the clamping moment of the edges are given as

$$M_x'' = M_y'' = -D\,(C + 0.3\,C) = -0.0183\,q\,a^2\,.$$

Hence, the required moments at the center are obtained by superposing the free moments M_x', M_y' on the above reactant moments, i. e.

$$M_x = M_y = (M_x' + M_x'') = (0.0479 - 0.0183)\,q\,a^2 = 0.0296\,q\,a^2\,.$$

On the other hand, if the values (10.13) are used, we obtain

$$M_x = M_y = 0.0294\,q\,a^2\,.$$

The practical coincidence with the previous result is here recognized.

11. Experimental evidences. To verify the theoretical results obtained in the foregoing example, some experiments were conducted. Aluminium plates are used as specimens, which are held on a steel frame by putting them between sharp edges for simple supporting and by clamping with additional steel blocks for clamped section (see Fig. 11). As the loading apparatus, a lever is used for point loading and an air bag for uniform loading. The actual experimental results are developed in Table 12 in which, to show the accuracy of experiments, the results for a simply supported plate and a fixed plate are presented together with their well known theoretical values.

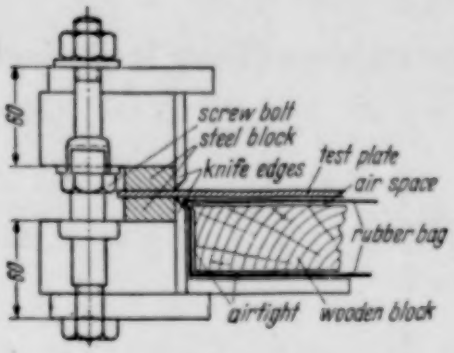


Fig. 11. Detail of supporting device.

12. Conclusion. A method of handling such a rectangular plate having special mixed boundary conditions was presented and also its reliability was investigated. The labour required for computation amounts to a substantial quantity and thus an approximate method seems to be desirable. However, such a difficulty could be solved through the use of a high speed digital computer at present. Actually, the author has taken advantage of such a devise.

In conclusion, the assistance of Mr. *S. Hatano* and Mr. *H. Okamura* on numerical computation and experiments is gratefully acknowledged.

Table 12. *Experimental data of the deflection and the strain at the center point of square plates*

Boundary cond. / Units	Computed deflection	Deflection per Load 0.01 kg/cm²			Computed Moment	Strain per Load 0.01 kg/cm²		
		Computed	Measured	Diff.		Computed	Measured	Diff.
	$\frac{q a^4}{E h^3}$	mm	mm	%	$q a^2$	10^{-4}	10^{-4}	%
	0.0443	*1 0.185	0.170	+ 8.1	*1 $M_x = 0.0478$	0.279	0.260	+ 6.8
					$M_y = 0.0478$	0.279	0.260	+ 6.8
	0.0323	*3 0.146	0.143	+ 2.1	*1 $M_x = 0.0350$	0.203	0.204	— 1.0
					$M_y = 0.0405$	0.272	0.279	— 2.6
	0.0155	*2 0.0712	0.0750	— 5.3	*2 $M_x = 0.0240$	0.157	0.172	— 9.5
					$M_y = 0.0240$	0.157	0.172	— 9.5
	0.0213	*3 0.0954	0.0975	+ 2.2	*3 $M_x = 0.0294$	0.183	0.200	— 9.3
					$M_y = 0.0294$	0.183	0.200	— 9.3
	0.0138	*4 0.0625	0.0665	— 6.4	*4 $M_x = 0.0229$	0.143	0.145	— 1.4
					$M_y = 0.0229$	0.143	0.145	— 1.4

[1] The numbers *1, *2, *3, *4 denote the following kinds of specimens:
*1, Aluminium plate, $300 \times 300 \times 3.00$ mm, $E = 720000$ kg/cm²,
*2, Aluminium plate, $300 \times 300 \times 2.97$ mm, $E = 673000$ kg/cm²,
*3, Aluminium plate, $300 \times 300 \times 2.97$ mm, $E = 690000$ kg/cm²,
*4, Aluminium plate, $300 \times 300 \times 2.96$ mm, $E = 690000$ kg/cm².

[2] Diff. $= \frac{\text{(Computed value} - \text{Measured value)}}{\text{Computed value}} \times 100$.

[3] It is assumed that *Poisson*'s ratio $\nu = 0.3$.

(Eingegangen am 17. März 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Muneaki Kurata*, Osaka (Japan), Osaka City University.

Spannungen in anisotropen kreiszylindrischen Rohren*

I. Mitteilung

Von K.-H. Müller

1. Einleitung. Bei der Herstellung von Bauteilen kann man durch geeignete Hinzunahme von Anisotropien eine günstigere Materialausnützung und damit oft eine gewünschte Gewichtsersparnis erreichen. Holz und verschiedene Kunststoffe sind durch ihre Faserstruktur dazu besonders prädestiniert; bei metallischen Baustoffen ist die Anisotropie im allgemeinen sehr gering, kann aber durch eine entsprechende Walztextur verstärkt werden.

Unsere Untersuchungen gelten der über den Querschnitt anisotropen Kreiszylinderschale (Kreisrohr), die über den Umfang eine beliebig verteilte, aber längs der einzelnen Mantellinie konstante Belastung trägt. Hier liegt, abgesehen von der Randstörzone, ein ebener Spannungszustand in einem Ringbereich vor. Wir wollen dabei einen etwa schon im Kreisring vorhandenen Eigenspannungszustand unbeachtet lassen. Die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen wir identisch, wie üblich im zweidimensionalen Falle, durch Einführen der *Airy*schen Spannungsfunktion $U(x, y)$.

2. Integration der Differentialgleichung für die Spannungsfunktion. Die Hinzunahme des *Hooke*schen Gesetzes für anisotrope Körper

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\,\sigma_x + s_{12}\,\sigma_y + s_{16}\,\tau_{xy}\,, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\,\sigma_x + s_{22}\,\sigma_y + s_{26}\,\tau_{xy}\,, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\,\sigma_x + s_{26}\,\sigma_y + s_{66}\,\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

führt über die Verträglichkeitsbedingung zur Differentialgleichung für die Spannungsfunktion:

$$s_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2\,s_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\,\partial y} + (2\,s_{12} + s_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} - 2\,s_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x\,\partial y^3} + s_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0\,. \tag{2}$$

Die charakteristische Gleichung von (2) besitzt, wie *Lechnitzki*[1] gezeigt hat, stets vier komplexe Wurzeln: $t_1 = \bar{t}_3$, $t_2 = \bar{t}_4$, wobei der Querstrich die Konjugation anzeigt.

Die allgemeinste Form der Spannungsfunktion finden wir dadurch, daß wir (2) mit

$$z_1 = x + t_1\,y\,, \qquad z_2 = x + t_2\,y \tag{3}$$

transformieren, zu

$$U = \sum_{\nu=1}^{4} F_\nu\,(x + t_\nu\,y)\,,$$

wie man leicht durch Einsetzen in (2) verifiziert. Da U reell sein muß, erhalten wir daraus

$$U(x, y) = 2\,\Re\mathrm{e}\,[\varphi(z_1) + \psi(z_2)]\,, \tag{4}$$

wobei $\varphi(z_1)$; $\psi(z_2)$ willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind, die gemäß den am Körper angreifenden Randkräften später festgelegt werden.

Setzen wir zur Abkürzung noch

$$\varphi' \equiv \frac{d\varphi(z_1)}{dz_1}, \qquad \psi' \equiv \frac{d\psi(z_2)}{dz_2},$$

$$p_1 \equiv s_{11}\,t_1^2 - s_{16}\,t_1 + s_{12}\,, \qquad p_2 \equiv s_{11}\,t_2^2 - s_{16}\,t_2 + s_{12}\,,$$

$$t_1\,q_1 \equiv s_{12}\,t_1^2 - s_{26}\,t_1 + s_{22}\,, \quad t_2\,q_2 \equiv s_{12}\,t_2^2 - s_{26}\,t_2 + s_{22}\,,$$

dann werden die Spannungen und Verschiebungen bei bekanntem $\varphi(z_1)$ und $\psi(z_2)$ festgelegt durch:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,\Re\mathrm{e}\,[t_1^2\,\varphi'' + t_2^2\,\psi'']\,, \\ \sigma_y &= 2\,\Re\mathrm{e}\,[\varphi'' + \psi'']\,, \\ \tau_{xy} &= -\,2\,\Re\mathrm{e}\,[t_1\,\varphi'' + t_2\,\psi'']\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 2\,\Re\mathrm{e}\,[p_1\,\varphi' + p_2\,\psi']\,, \\ v &= 2\,\Re\mathrm{e}\,[q_1\,\varphi' + q_2\,\psi']\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

* Herrn Prof. Dr. *H. J. Seemann*, Saarbrücken, zum 60. Geburtstag.

[1] Siehe *G. N. Sawin*, Spannungserhöhung am Rande von Löchern, S. 34, Berlin 1956.

Die am Rand unseres Bereiches wirkenden äußeren Lasten erfassen wir mit

$$X \equiv \int_{t_0}^{t_1} X_n \, ds = \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{t_0}^{t_1}, \qquad Y \equiv \int_{t_0}^{t_1} Y_n \, ds = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{7}$$

Es empfiehlt sich beim Kreisring, die radialen und azimutalen Spannungs- und Verschiebungskomponenten zu benutzen. Wir erhalten sie aus den Invarianten zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\vartheta + \sigma_r &= \sigma_y + \sigma_x, \\ \sigma_\vartheta - \sigma_r + 2\,i\,\tau_{r\vartheta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy})\,e^{2i\vartheta}, \\ v_r + i\,v_\vartheta &= (u + i\,v)\,e^{-i\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Um den Spannungs- und Verschiebungszustand im Ring bei vorgegebenen Randlasten $(\sigma_r - i\,\tau_{r\vartheta})_{Rand}$ aufzufinden, entwickeln wir diese in *Fourier*reihen

$$(\sigma_r - i\,\tau_{r\vartheta})_{r=R} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, z^n, \qquad (\sigma_r - i\,\tau_{r\vartheta})_{r=\varrho} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n\, z^n. \tag{9}$$

Die Relationen (5) und (8) führen aber zur Gleichung

$$\begin{aligned} 2\,(\sigma_r - i\,\tau_{r\vartheta}) = {} & [(1+t_1^2) - (1 - i\,t_1)^2\,e^{2i\vartheta}]\,\varphi'' + [\overline{(1+t_1^2)} - \overline{(1+i\,t_1)^2}\,e^{2i\vartheta}]\,\overline{\varphi''} \\ & + [(1+t_2^2) - (1 - i\,t_2)^2\,e^{2i\vartheta}]\,\psi'' + [\overline{(1+t_2^2)} - \overline{(1+i\,t_2)^2}\,e^{2i\vartheta}]\,\overline{\psi''}, \end{aligned} \tag{10}$$

in der also nach (3) (9) z, z_1, z_2 als Argumente vorkommen.

Um hier ein einheitliches Argument zu erreichen, veranschaulichen wir uns, daß die Gleichungen (3) unseren Kreisring $\mathfrak{R}$ der z-Ebene ($z = x + i\,y = r\,e^{i\vartheta}$) affin auf den elliptischen Ring $\begin{cases}\mathfrak{R}_1\\ \mathfrak{R}_2\end{cases}$ der komplexen $\begin{cases}z_1\\ z_2\end{cases}$-Ebene $\begin{cases}z_1 = x_1 + i\,y_1\\ z_2 = x_2 + i\,y_2\end{cases}$ projizieren. Die zugehörigen Transformationsformeln

$$z_1 = \frac{1 - i\,t_1}{2}\,z + \frac{1 + i\,t_1}{2}\,\bar{z}, \qquad z_2 = \frac{1 - i\,t_2}{2}\,z + \frac{1 + i\,t_2}{2}\,\bar{z} \tag{11}$$

sind aber nicht analytisch, da $\bar{z}$ darin auftritt. Wir normieren so, daß die Zylindermittelfläche den Radius $|z| = 1$ hat. Für die Punkte $|z| = 1$ ist $\bar{z} = 1/z$; aus (11) folgt dann

$$z_1 = \frac{1 - i\,t_1}{2}\,z + \frac{1 + i\,t_1}{2\,z}, \qquad z_2 = \frac{1 - i\,t_2}{2}\,z + \frac{1 + i\,t_2}{2\,z}. \tag{12}$$

Bei einem Körper von (bezüglich des Durchmessers) sehr geringer Wandstärke, einer Schale also, dürfen wir diese Abbildungsfunktion für den gesamten Ringbereich benutzen. In Gleichung (10) läßt sich dadurch die einheitliche Variable z verwenden.

Wir setzen nun:

$$\varphi''(z_1(z)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, z^n, \qquad \psi''(z_2(z)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n\, z^n \tag{14}$$

in (10) ein und erhalten durch Koeffizientenvergleich entsprechender z-Potenzen zwei Rekursionsformeln für die noch zu bestimmenden Koeffizienten a_n, b_n. Zwei weitere Rekursionsformeln folgen, wenn wir n durch $-(n-2)$ ersetzen und anschließend konjugieren. Somit stehen zum Errechnen der Koeffizienten die vier linearen Gleichungen zur Verfügung

$$\left.\begin{aligned} & R^n (1+t_1^2)\,a_n + R^{-n}\,\overline{(1+t_1^2)\,a_{-n}} - R^{n-2}(1 - i\,t_1)^2\,a_{n-2} \\ & \qquad - R^{-(n-2)}\,\overline{(1+i\,t_1)^2\,a_{-(n-2)}} + \cdots [b_\nu] = 2\,A_n\,R^n, \\ & \varrho^n (1+t_1^2)\,a_n + \varrho^{-n}\,\overline{(1+t_1^2)\,a_{-n}} - \varrho^{n-2}(1 - i\,t_1)^2\,a_{n-2} \\ & \qquad - \varrho^{-(n-2)}\,\overline{(1+i\,t_1)^2\,a_{-(n-2)}} + \cdots [b_\nu] = 2\,B_n\,\varrho^n, \\ & -R^n (1+i\,t_1)^2\,a_n - R^{-n}\,\overline{(1 - i\,t_1)^2\,a_{-n}} + R^{n-2}(1+t_1^2)\,a_{n-2} \\ & \qquad + R^{-(n-2)}\,\overline{(1+t_1^2)\,a_{-(n-2)}} + \cdots [b_\nu] = 2\,\bar{A}_{-(n-2)}\,R^{-(n-2)}, \\ & -\varrho^n (1+i\,t_1)^2\,a_n - \varrho^{-n}\,\overline{(1 - i\,t_1)^2\,a_{-n}} + \varrho^{n-2}(1+t_1^2)\,a_{n-2} \\ & \qquad + \varrho^{-(n-2)}\,\overline{(1+t_1^2)\,a_{-(n-2)}} + \cdots [b_\nu] = 2\,\bar{B}_{-(n-2)}\,\varrho^{-(n-2)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Da sich einer vorgegebenen Belastung nur eine bis auf einen überall konstanten Grundspannungszustand eindeutige Spannungsverteilung zuordnen läßt, können wir a_0, b_0 willkürlich wählen:

$$a_0 = b_0 = 0. \tag{16}$$

Das Einbeziehen der Randlasten nach (7) und die Eindeutigkeit der Verschiebungskomponenten bringen

$$\left.\begin{aligned}
(1+it_1)\,a_{-1}-\overline{(1-it_1)\,a_{-1}}+(1+it_2)\,b_{-1}-\overline{(1-it_2)\,b_{-1}}&=-\frac{X+iY}{2\pi},\\
(p_1+iq_1)\,a_{-1}-\overline{(p_1-iq_1)\,a_{-1}}+(p_2+iq_2)\,b_{-1}-\overline{(p_2-iq_2)\,b_{-1}}&=0,\\
-(1-it_1)\,a_{-1}+\overline{(1+it_1)\,a_{-1}}-(1-it_2)\,b_{-1}+\overline{(1+it_2)\,b_{-1}}&=-\frac{X-iY}{2\pi},\\
-(p_1-iq_1)\,a_{-1}+\overline{(p_1+iq_1)\,a_{-1}}-(p_2-iq_2)\,b_{-1}+\overline{(p_2+iq_2)\,b_{-1}}&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Stehen alle am einzelnen Rande wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, dann ist $a_{-1}=b_{-1}=0$.

Die Rekursionen (15) bilden, wenn man die Koeffizienten $\begin{cases}a_0 & b_0\\ a_{-1} & b_{-1}\end{cases}$ heranzieht, jeweils ein System von vier linearen Gleichungen für $\begin{cases}a_2\,b_2\,a_{-2}\,b_{-2}\\ a_1\,b_1\,a_{-3}\,b_{-3}\end{cases}$ usw. Da die Koeffizientendeterminante von (15) hierbei aber proportional der Wandstärke e ist, und wir mit einem $e \ll 1$ arbeiten, wird man zweckmäßig das System etwas umformen mit

$$R^m=1+m\frac{e}{2},\qquad \varrho^m=1-m\frac{e}{2}\tag{18}$$

zu

$$\left.\begin{aligned}
(1+t_1^2)\,a_n+\overline{(1+t_1^2)\,a_{-n}}-(1-it_1)^2\,a_{n-2}-\overline{(1+it_1)^2\,a_{-(n-2)}}+\cdots&=C_n^{(1)},\\
(1+t_1^2)\,a_n-\overline{(1+t_1^2)\,a_{-n}}-\frac{n-2}{n}(1-it_1)^2\,a_{n-2}+\frac{n-2}{n}\overline{(1+it_1)^2\,a_{-(n-2)}}+\cdots&=C_n^{(2)},\\
(1+it_1)^2\,a_n+\overline{(1-it_1)^2\,a_{-n}}-(1+t_1^2)\,a_{n-2}-\overline{(1+t_1^2)\,a_{-(n-2)}}+\cdots&=C_n^{(3)},\\
(1+it_1)^2\,a_n-\overline{(1-it_1)^2\,a_{-n}}-\frac{n-2}{n}(1+t_1^2)\,a_{n-2}+\frac{n-2}{n}\overline{(1+t_1^2)\,a_{-(n-2)}}+\cdots&=C_n^{(4)},
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_n^{(1)}&=A_n+B_n+(A_n-B_n)\,n\frac{e}{2},\\
C_n^{(2)}&=\frac{A_n-B_n}{n\frac{e}{2}}+A_n+B_n,\\
C_n^{(3)}&=-(\bar{A}_{-(n-2)}+\bar{B}_{-(n-2)})+(\bar{A}_{-(n-2)}-\bar{B}_{-(n-2)})(n-2)\frac{e}{2},\\
C_n^{(4)}&=-\frac{\bar{A}_{-(n-2)}-\bar{B}_{-(n-2)}}{n\frac{e}{2}}+(\bar{A}_{-(n-2)}+\bar{B}_{-(n-2)})\frac{n-2}{n}
\end{aligned}$$

ist. Damit ist die Koeffizientendeterminante aus der Abhängigkeit von e befreit.

Bei einer μ-mal stetig differenzierbaren Randlast sind die Fourier-Koeffizienten A_m; B_m von der Ordnung $0\left(\frac{1}{m^{2+\mu}}\right)$. Man kann also hier mit der Substitution:

$$a_n=\frac{\alpha_n}{n^{2+\mu}},\qquad b_n=\frac{\beta_n}{n^{2+\mu}}$$

die Konvergenz der Reihen φ und ψ günstig beeinflussen.
Unsere elastizitätstheoretische Aufgabe ist damit auf die algebraische, das fortgesetzte Lösen von vier linearen Gleichungen zurückgeführt.

Aus den so bestimmten Koeffizienten erhält man $\varphi(z_1(z))$ und $\psi(z_2(z))$ und damit die Spannungen und Verschiebungen dadurch, daß man die Abbildungen $z_1=z_1(z)$ und $z_2=z_2(z)$ rückgängig macht.

Über (12) finden wir $z(z_1)$ und $z(z_2)$ und erhalten so

$$\left.\begin{aligned}
\varphi''(z_1)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n\left(\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-(1+t_1^2)}}{1-it_1}\right)^n,\\
\psi''(z_2)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}b_n\left(\frac{z_2+\sqrt{z_2^2-(1+t_2^2)}}{1-it_2}\right)^n.
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

3. Einzelkraftbelastung. Bei stückweise stetiger Randlast bedarf diese Vorgehensweise keiner weiteren Erläuterungen; bei Einzelkräften wird man zweckmäßigerweise den folgenden Weg einschlagen.

Über den einen Rand unseres Ringes seien N Einzelkräfte P_ν verteilt, die mit der Last des anderen Randes im Gleichgewicht stehen. Wir ersetzen zunächst jede von ihnen durch eine über den ganzen Umfang stetige und einmal stetig differenzierbare Funktion, z. B.

$$f_\nu(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq c_\nu - \pi/\alpha\,, \\ k_\nu\,[1 + \cos(\alpha\,\vartheta + c_\nu)] & \text{für} \quad c_\nu - \pi/\alpha \leqq \vartheta \leqq c_\nu + \pi/\alpha\,, \\ 0 & \text{für} \quad c_\nu + \pi/\alpha \leqq \vartheta \leqq 2\pi\,. \end{cases} \tag{21}$$

Mit einer solchen stetigen Randlast (α wird positiv ganz und so groß gewählt, daß sich die einzelnen $f_\nu(\vartheta)$ gegenseitig nicht überschneiden) errechnen wir nun die zugehörigen Spannungen und Verschiebungen. Danach führt ein Grenzübergang

$$\lim_{k_\nu,\,\alpha\to\infty} \frac{2\pi\,k_\nu}{\alpha} = P_\nu \tag{22}$$

zur gewünschten Spannungs- und Verschiebungsverteilung bei Einzelkraftbelastung.

Eine solche Darstellung ist aus zweierlei Gründen der oft benutzten Rechtecklast:

$$f_\nu(\vartheta) = \begin{cases} 0 \\ k_\nu \\ 0 \end{cases} \tag{23}$$

vorzuziehen:

1. Ihre Fourier-Reihe ist im Gegensatz zu der von (23) für jedes endliche α absolut konvergent.

2. Da ja tatsächlich niemals ein linienförmiger Lastangriff (Schneidenlast) auftritt — Herstellung und elastische Deformation von Schneide und Werkstück sorgen dafür — vermag sie eine konzentrierte Belastung sicherlich wirklichkeitsnaher zu erfassen als eine Rechtecklast.

4. Bemerkung. Die Auswertung unserer Ergebnisse für technisch-wichtiges Rohrmaterial kann erst in einer späteren II. Mitteilung erfolgen, da die Messungen zur Ermittlung der Anisotropiekonstanten von Metallen und Kunststoffen noch nicht abgeschlossen sind. Die in einem weiteren Bericht folgenden Untersuchungen erfassen dann auch im Rohr vorhandene Eigenspannungen, die wir in der vorliegenden Arbeit unbeachtet ließen.

5. Zusammenfassung. Unter Hinzunahme komplexer analytischer Funktionen läßt sich der Spannungs- und Verschiebungszustand eines über den Querschnitt beliebig-anisotropen Kreiszylinderrohres unter willkürlichen zylindrischen Randlasten in Form unendlicher Reihen bestimmen, deren Koeffizienten rekursiv aus einem System von vier linearen Gleichungen errechnet werden. Eine geeignete Korrespondenz zwischen Anisotropierichtung und Last ermöglichen eine optimale Materialausnützung.

(Eingegangen am 9. April 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl-Heinz Müller*, Institut für Technische Mechanik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken.

Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper

Von D. Rüdiger

1. Einleitung. Die aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie abgeleiteten direkten Methoden zur numerischen Darstellung der Lösung eines vorgegebenen Randwertproblems der Elastizitätstheorie haben für die praktische Durchführung den Nachteil, daß Funktionen zu finden sind, die auf bestimmten Teiloberflächen des Körpers vorgeschriebene Werte annehmen müssen. Durch eine Modifikation des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie gelingt es, die Randbedingungen des Variationsproblems fortfallen zu lassen. Dadurch wird es möglich, bei jeder vorgegebenen Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie mit — hinsichtlich der Randbedingungen — willkürlich gewählten Funktionen die *Ritz*sche und mit beliebigen Partikularlösungen der Grundgleichungen die *Trefftz*sche Methode anzuwenden.

Zur Ableitung des Variationsprinzips werden die fünfzehn Grundgleichungen der Elastizitätstheorie kleiner Verschiebungen in allgemeinen Koordinaten

$$\sigma^{\lambda\mu}|_{\lambda} + p^{\mu} = 0\,, \tag{1_1}$$

$$D^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,(v^{\lambda}|^{\mu} + v^{\mu}|^{\lambda})\,, \tag{1_2}$$

$$\sigma^{\lambda\mu} = 2\,G\left(D^{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,g^{\lambda\mu}\,D^{\pi}_{\pi}\right) \tag{1_3}$$

verwendet. Hierin sind $\sigma^{\lambda\mu}$, $D^{\lambda\mu}$ und $g^{\lambda\mu}$ die kontravarianten Koordinaten des Spannungs-, Deformations- und Maßtensors. Der Verschiebungsvektor ist durch v^{λ}, der Vektor der Volumenkraft durch p^{λ} gekennzeichnet. Als elastische Konstanten werden der Schubelastizitätsmodul G und die Querdehnungszahl ν benutzt. Sind n_{λ} die kovarianten Koordinaten des Normalenvektors der Körperoberfläche, dann ist ihr Spannungsvektor durch

$$t^{\mu} = \sigma^{\lambda\mu}\,n_{\lambda} \tag{2}$$

festgelegt.

2. Das Variationsprinzip. Ein elastischer Körper mit der Oberfläche F unterliegt der Volumenkraft $p^{\lambda} = p^{\lambda}(x^1, x^2, x^3)$ und ist beliebigen Randbedingungen unterworfen. Dabei sollen auf den Teilflächen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ die Flächenkräfte $\bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3$ und auf den Teilflächen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ die Verschiebungen $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3$ vorgegeben sein. Es ist dann $F = \overset{1}{G} + \overset{1}{G}$, $F = \overset{2}{G} + \overset{2}{G}$ und $F = \overset{3}{G} + \overset{3}{G}$. Zur Formulierung des Variationsprinzips wird die Formänderungsarbeit $-\delta\Pi$ des im Gleichgewicht befindlichen elastischen Körpers bei dem Verschiebungszustand δv^{λ} gebildet. Sie ist mit dem Volumenelement dV für einen Körper vom Volumen R

$$-\delta\Pi = \iiint\limits_{R} (\sigma^{\lambda\mu}|_{\lambda} + p^{\mu})\,\delta v_{\mu}\,dV = 0\,. \tag{3_1}$$

Führt man in (3_1) die Identität

$$\sigma^{\lambda\mu}|_{\lambda}\,\delta v_{\mu} = (\sigma^{\lambda\mu}\,\delta v_{\mu})|_{\lambda} - \sigma^{\lambda\mu}\,\delta D_{\lambda\mu}$$

ein, dann ergibt sich

$$-\delta\Pi = -\iiint\limits_{R} \sigma^{\lambda\mu}\,\delta D_{\lambda\mu}\,dV + \iiint\limits_{R} (\sigma^{\lambda\mu}\,\delta v_{\mu})|_{\lambda}\,dV + \iiint\limits_{R} p^{\lambda}\,\delta v_{\lambda}\,dV = 0\,. \tag{3_2}$$

Für den Integranden des ersten Volumenintegrals kann mit dem *Hooke*schen Gesetz (1_3)

$$\begin{aligned}
\sigma^{\lambda\mu}\,\delta D_{\lambda\mu} &= 2\,G\left(D^{\lambda\mu}\,\delta D_{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,D^{\lambda}_{\lambda}\,\delta D^{\mu}_{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\delta\left[2\,G\left(D^{\lambda\mu}\,D_{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,D^{\lambda}_{\lambda}\,D^{\mu}_{\mu}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\,\delta\,(\sigma^{\lambda\mu}\,D_{\lambda\mu}) = \frac{1}{2}\,\delta\,(\sigma^{\lambda\mu}\,v_{\lambda}|_{\mu})
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Beachtet man noch die wegen (1_1) gültige Beziehung

$$\sigma^{\lambda\mu} v_\lambda|_\mu = (\sigma^{\lambda\mu} v_\lambda)|_\mu + p^\lambda v_\lambda ,$$

so folgt schließlich

$$\sigma^{\lambda\mu}\,\delta D_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,\delta\left[(\sigma^{\lambda\mu} v_\lambda)|_\mu + p^\lambda v_\lambda\right].$$

Für die potentielle Energie $\delta\Pi$ erhält man damit

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int \delta\,(\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)|_\lambda\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int \delta\,(p^\lambda v_\lambda)\,dV -$$

$$- \int\limits_R\int\int (\sigma^{\lambda\mu}\,\delta v_\mu)|_\lambda\,dV - \int\limits_R\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0 . \qquad (4_1)$$

Die Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes

$$\iiint\limits_R (\quad)|_\lambda\,dV = \iint\limits_F (\quad)\,n_\lambda\,df$$

auf das erste und dritte Volumenintegral in (4_1) ergibt

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_F\int \delta\,(\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)\,n_\lambda\,df + \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int \delta\,(p^\lambda v_\lambda)\,dV -$$

$$- \int\limits_F\int \sigma^{\lambda\mu}\,\delta v_\mu\,n_\lambda\,df - \int\limits_R\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0 , \qquad (4_2)$$

und nach Einführung des Spannungsvektors (2) wird

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_F\int \delta\,(t^\lambda v_\lambda)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int \delta\,(p^\lambda v_\lambda)\,dV -$$

$$- \int\limits_F\int t^\lambda\,\delta v_\lambda\,df - \int\limits_R\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0 . \qquad (4_3)$$

Ersetzt man die Oberflächenintegrale in (4_3) durch die Gebietsintegrale über $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ und $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$, so folgt

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int \delta(t^1 v_1)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int \delta(t^2 v_2)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int \delta(t^3 v_3)\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int \delta(t^1 v_1)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int \delta(t^2 v_2)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int \delta(t^3 v_3)\,df -$$

$$- \int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\,\delta v_1\,df - \int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\,\delta v_2\,df - \int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\,\delta v_3\,df -$$

$$- \int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\,\delta v_1\,df - \int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\,\delta v_2\,df - \int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\,\delta v_3\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int \delta(p^\lambda v_\lambda)\,dV - \int\limits_R\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0 . \qquad (4_4)$$

Führt man in (4_4) die Identitäten

$$-t^1\,\delta v_1 = -\,\delta(t^1 v_1) + \delta t^1 v_1 ,$$
$$-t^2\,\delta v_2 = -\,\delta(t^2 v_2) + \delta t^2 v_2 ,$$
$$-t^3\,\delta v_3 = -\,\delta(t^3 v_3) + \delta t^3 v_3$$

ein, dann erhält man zunächst

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta(t^1 v_1)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta(t^2 v_2)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta(t^3 v_3)\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta(t^1 v_1)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta(t^2 v_2)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta(t^3 v_3)\,df -$$

$$- \int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\,\delta v_1\,df - \int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\,\delta v_2\,df - \int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\,\delta v_3\,df -$$

$$- \int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta(t^1 v_1)\,df - \int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta(t^2 v_2)\,df - \int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta(t^3 v_3)\,df +$$

$$+ \int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta t^1 v_1\,df + \int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta t^2 v_2\,df + \int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta t^3 v_3\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int\delta(p^\lambda v_\lambda)\,dV - \int\limits_{R}\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0$$

und nach Zusammenfassung

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta(t^1 v_1)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta(t^2 v_2)\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta(t^3 v_3)\,df -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta(t^1 v_1)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta(t^2 v_2)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta(t^3 v_3)\,df -$$

$$- \int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\,\delta v_1\,df - \int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\,\delta v_2\,df - \int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\,\delta v_3\,df +$$

$$+ \int\limits_{\overset{1}{G}}\int\delta t^1 v_1\,df + \int\limits_{\overset{2}{G}}\int\delta t^2 v_2\,df + \int\limits_{\overset{3}{G}}\int\delta t^3 v_3\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int\delta(p^\lambda v_\lambda)\,dV - \int\limits_{R}\int\int p^\lambda\,\delta v_\lambda\,dV = 0\,. \qquad (5)$$

Die Beziehung (5) ist eine Modifikation der Energiehauptformel, aus der sich sofort das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper ableiten läßt. Da nämlich auf den Teiloberflächen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ die Flächenkräfte $\bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3$, auf den Teiloberflächen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ die Verschiebungen $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3$ und für den ganzen Körper die Volumenkraft $\bar{p}^\lambda$ fest vorgegeben sind, gilt

$$\delta\Pi = \delta\Big[\frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int(t^1 - 2\,\bar{t}^1)\,v_1\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int(t^2 - 2\,\bar{t}^2)\,v_2\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int(t^3 - 2\,\bar{t}^3)\,v_3\,df -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\,(v_1 - 2\,\bar{v}_1)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\,(v_2 - 2\,\bar{v}_2)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\,(v_3 - 2\,\bar{v}_3)\,df +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int(p^\lambda - 2\,\bar{p}^\lambda)\,v_\lambda\,dV\Big] = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich, daß unter allen möglichen Verschiebungen eines elastischen Körpers, die auf der gesamten Oberfläche beliebige Werte annehmen können, diejenigen eintreten, die den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^1}\int (t^1 - 2\,\bar{t}^1)\,v_1\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^2}\int (t^2 - 2\,\bar{t}^2)\,v_2\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^3}\int (t^3 - 2\,\bar{t}^3)\,v_3\,df - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^1}\int t^1\,(v_1 - 2\,\bar{v}_1)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^2}\int t^2\,(v_2 - 2\,\bar{v}_2)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^3}\int t^3\,(v_3 - 2\,\bar{v}_3)\,df + \\ + \frac{1}{2}\int\int\int\limits_{R} (p^\lambda - 2\,\bar{p}^\lambda)\,v_\lambda\,dV \end{aligned} \tag{6}$$

zu einem Extremum werden lassen. Dabei hat das Extremalprinzip (6) gegenüber der klassischen Formulierung[1] den Vorteil, daß an die infinitesimal benachbarten Systeme von Verschiebungen hinsichtlich der Randbedingungen keine Forderungen gestellt zu werden brauchen. Man kann also zur numerischen Darstellung der Lösung $v^\lambda = v^\lambda(x^1, x^2, x^3)$ eines beliebig vorgegebenen Randwertproblems der Elastizitätstheorie im Sinne von *W. Ritz* einen Ansatz

$$\overset{n}{v}{}^\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu,\lambda}{c}\,\overset{\nu}{\varphi}{}^\lambda \tag{7$_1$}$$

mit willkürlichen Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^\lambda$ machen. Hierbei sind die Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^\lambda$ so allgemein auszuwählen, daß bei hinreichend großem n und passend gewählten Koeffizienten $\overset{\nu,\lambda}{c}$ die Lösung der vorgegebenen Randwertaufgabe mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden kann.

Das System von Verschiebungen (7_1) liefert für den Deformationstensor, den Spannungstensor und den Spannungsvektor

$$\overset{n}{D}{}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\overset{\nu,\lambda}{c}\,\overset{\nu}{\varphi}{}^\lambda|^\mu + \overset{\nu,\mu}{c}\,\overset{\nu}{\varphi}{}^\mu|^\lambda\right), \qquad \overset{n}{\sigma}{}^{\lambda\mu} = 2\,G\left(\overset{n}{D}{}^{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,g^{\lambda\mu}\,\overset{n}{D}{}^{\varkappa}_{\varkappa}\right), \qquad \overset{n}{t}{}^\mu = \overset{n}{\sigma}{}^{\lambda\mu}\,n_\lambda\,. \tag{7$_2$}$$

Als Volumenkraft erhält man

$$\overset{n}{p}{}^\mu = -\,\overset{n}{\sigma}{}^{\lambda\mu}|_\lambda\,. \tag{7$_3$}$$

Die Koeffizienten $\overset{\nu,\lambda}{c}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\lambda = 1, 2, 3$) werden nunmehr so bestimmt, daß die mit (7) gebildete potentielle Energie (6)

$$\begin{aligned} \overset{n}{\Pi} = \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^1}\int \left(\overset{n}{t}{}^1 - 2\,\bar{t}^1\right)\overset{n}{v}_1\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^2}\int \left(\overset{n}{t}{}^2 - 2\,\bar{t}^2\right)\overset{n}{v}_2\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^3}\int \left(\overset{n}{t}{}^3 - 2\,\bar{t}^3\right)\overset{n}{v}_3\,df - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^1}\int \overset{n}{t}{}^1\left(\overset{n}{v}_1 - 2\,\bar{v}_1\right)df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^2}\int \overset{n}{t}{}^2\left(\overset{n}{v}_2 - 2\,\bar{v}_2\right)df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{G}^3}\int \overset{n}{t}{}^3\left(\overset{n}{v}_3 - 2\,\bar{v}_3\right)df + \\ + \frac{1}{2}\int\int\int\limits_{R}\left(\overset{n}{p}{}^\lambda - 2\,\bar{p}^\lambda\right)\overset{n}{v}_\lambda\,dV \end{aligned} \tag{8}$$

dem Extremum möglichst nahe kommt. Die Bedingungsgleichungen für das Eintreten des Extremwertes lauten dann

$$\frac{\partial \overset{n}{\Pi}}{\partial\,\overset{\nu,\lambda}{c}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3) \tag{9}$$

und haben die *Galerkin*sche Form.

3. Das Verfahren von *Trefftz*. Beim *Trefftz*schen Verfahren wird der Ansatz

$$\overset{n}{v}{}^\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{\varphi}{}^\lambda \tag{10}$$

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., S. 80. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

verwendet, bei dem die Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^{\lambda}$ Partikularlösungen der homogenen elastischen Grundgleichungen sind und entsprechend dem Variationsprinzip (6) auf der Oberfläche beliebige Werte annehmen können. Bildet man die dem Verschiebungszustand (10) entsprechenden Elemente des Deformationstensors $\overset{n}{D}{}^{\lambda\mu}$, des Spannungstensors $\overset{n}{\sigma}{}^{\lambda\mu}$ und des Spannungsvektors $\overset{n}{t}{}^{\lambda}$, so ergeben sich mit

$$\overset{\nu}{d}{}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\overset{\nu}{\varphi}{}^{\lambda}|^{\mu} + \overset{\nu}{\varphi}{}^{\mu}|^{\lambda}\right),$$

$$\overset{\nu}{s}{}^{\lambda\mu} = 2\,G\left(\overset{\nu}{d}{}^{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu} g^{\lambda\mu}\,\overset{\nu}{d}{}^{\pi}_{\pi}\right)$$

und $\overset{\nu}{\tau}{}^{\mu} = \overset{\nu}{s}{}^{\lambda\mu}\,n_{\lambda}$ die Ausdrücke

$$\overset{n}{D}{}^{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{d}{}^{\lambda\mu}, \qquad \overset{n}{\sigma}{}^{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{s}{}^{\lambda\mu}, \qquad \overset{n}{t}{}^{\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{\tau}{}^{\lambda}. \tag{11$_1$}$$

Da die Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^{\lambda}$ voraussetzungsgemäß Partikularlösungen der homogenen elastischen Grundgleichungen sind, ist

$$\overset{\nu}{s}{}^{\lambda\mu}|_{\lambda} = 0\,. \tag{11$_2$}$$

Die n linearen Gleichungen für die Konstanten lauten dann

$$\frac{\partial \overset{n}{H}}{\partial \overset{\nu}{c}} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und man erhält mit (11)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overset{n}{H}}{\partial \overset{\nu}{c}} = 0 = {} & \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{1}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\,\overset{n}{v}_1 + \overset{n}{t}{}^{1}\,\overset{\nu}{\varphi}_1 - 2\,\bar{t}^{1}\,\overset{\nu}{\varphi}_1\right)df + \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{2}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\,\overset{n}{v}_2 + \overset{n}{t}{}^{2}\,\overset{\nu}{\varphi}_2 - 2\,\bar{t}^{2}\,\overset{\nu}{\varphi}_2\right)df + \\ & + \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{3}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\,\overset{n}{v}_3 + \overset{n}{t}{}^{3}\,\overset{\nu}{\varphi}_3 - 2\,\bar{t}^{3}\,\overset{\nu}{\varphi}_3\right)df - \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{1}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\,\overset{n}{v}_1 + \overset{n}{t}{}^{1}\,\overset{\nu}{\varphi}_1 - 2\,\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\,\bar{v}_1\right)df - \\ & - \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{2}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\,\overset{n}{v}_2 + \overset{n}{t}{}^{2}\,\overset{\nu}{\varphi}_2 - 2\,\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\,\bar{v}_2\right)df - \frac{1}{2}\iint\limits_{\overset{3}{G}}\left(\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\,\overset{n}{v}_3 + \overset{n}{t}{}^{3}\,\overset{\nu}{\varphi}_3 - 2\,\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\,\bar{v}_3\right)df - \\ & - \iiint\limits_{R}\bar{p}^{\lambda}\,\overset{\nu}{\varphi}_{\lambda}\,dV \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{12}$$

Bei Anwendung des *Betti*schen Theorems[1]

$$\begin{aligned}& \iint\limits_{\overset{1}{G}}\overset{n}{t}{}^{1}\,\overset{\nu}{\varphi}_1\,df + \iint\limits_{\overset{2}{G}}\overset{n}{t}{}^{2}\,\overset{\nu}{\varphi}_2\,df + \iint\limits_{\overset{3}{G}}\overset{n}{t}{}^{3}\,\overset{\nu}{\varphi}_3\,df + \iint\limits_{\overset{1}{G}}\overset{n}{t}{}^{1}\,\overset{\nu}{\varphi}_1\,df + \iint\limits_{\overset{2}{G}}\overset{n}{t}{}^{2}\,\overset{\nu}{\varphi}_2\,df + \iint\limits_{\overset{3}{G}}\overset{n}{t}{}^{3}\,\overset{\nu}{\varphi}_3\,df \\ & = \iint\limits_{\overset{1}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\,\overset{n}{v}_1\,df + \iint\limits_{\overset{2}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\,\overset{n}{v}_2\,df + \iint\limits_{\overset{3}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\,\overset{n}{v}_3\,df + \iint\limits_{\overset{1}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\,\overset{n}{v}_1\,df + \iint\limits_{\overset{2}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\,\overset{n}{v}_2\,df + \iint\limits_{\overset{3}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\,\overset{n}{v}_2\,df\end{aligned}$$

auf (12) können die n linearen Gleichungen für die Konstanten $\overset{\nu}{c}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ somit in der Form

$$\begin{aligned}& \iint\limits_{\overset{1}{G}}\left(\overset{n}{t}{}^{1} - \bar{t}^{1}\right)\overset{\nu}{\varphi}_1\,df + \iint\limits_{\overset{2}{G}}\left(\overset{n}{t}{}^{2} - \bar{t}^{2}\right)\overset{\nu}{\varphi}_2\,df + \iint\limits_{\overset{3}{G}}\left(\overset{n}{t}{}^{3} - \bar{t}^{3}\right)\overset{\nu}{\varphi}_3\,df - \\ & - \iint\limits_{\overset{1}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{1}\left(\overset{n}{v}_1 - \bar{v}_1\right)df - \iint\limits_{\overset{2}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{2}\left(\overset{n}{v}_2 - \bar{v}_2\right)df - \iint\limits_{\overset{3}{G}}\overset{\nu}{\tau}{}^{3}\left(\overset{n}{v}_3 - \bar{v}_3\right)df + \\ & + \iiint\limits_{R}\bar{p}^{\lambda}\,\overset{\nu}{\varphi}_{\lambda}\,dV = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\end{aligned} \tag{13}$$

angegeben werden. Läßt man in (10) die Anzahl der Glieder über alle Grenzen wachsen, dann liefert (13) die Koeffizienten des gegen die exakte Lösung konvergierenden Ansatzes.

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 87.

4. Die *de St. Venant*sche Torsion als Beispiel. Auf das Beispiel der *de St. Venant*schen Torsion soll das verallgemeinerte Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (6) angewendet und für einen geeigneten Ansatz (10) die Herleitung der zugehörigen *Trefftz*schen Gleichungen gezeigt werden. Dazu wird entsprechend Abb. 1 ein prismatischer Körper in allgemeinen Koordinaten x^α,

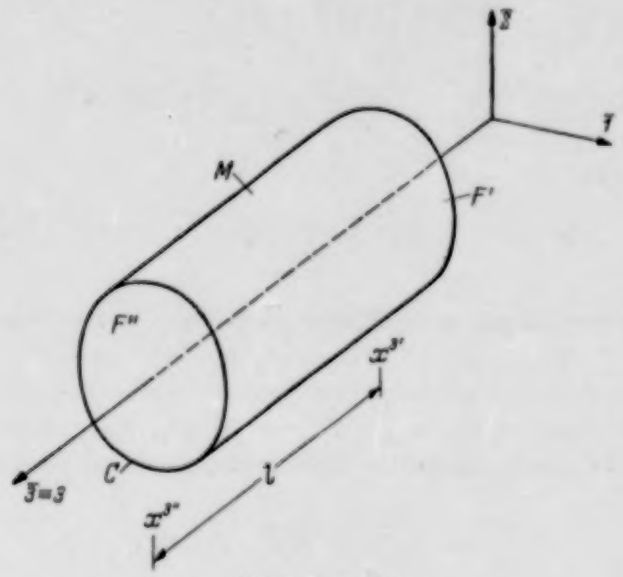


Abb. 1. Geometrie.

x^3 $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$, die mit den kartesischen Koordinaten x^i, $x^{\bar{3}}$ $(i, j, k = \bar{1}, \bar{2})$ durch $x^i = x^i(x^1, x^2)$, $x^{\bar{3}} = x^3$ verknüpft sind, beschrieben. Die Tangenten- und Gradientenvektoren ergeben sich zu

$$c_\alpha^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^\alpha}, \qquad c_{\bar{3}}^k = c_\alpha^{\bar{3}} = 0, \qquad c_{\bar{3}}^{\bar{3}} = 1$$

und

$$c_k^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^k}, \qquad c_k^{\bar{3}} = c_{\bar{3}}^\alpha = 0, \qquad c_{\bar{3}}^{\bar{3}} = 1.$$

Die Randbedingungen der freien Torsion lauten in kartesischen Koordinaten[1] auf der Mantelfläche M

$$t^k = t^{\bar{3}} = 0$$

und auf den Stirnflächen F' und F''

$$v_i = -\alpha\, \varepsilon_{ij}\, x^j\, x^{\bar{3}}, \qquad t^{\bar{3}} = 0,$$

wobei ε_{ij} den ebenen ε-Tensor und α die Verwindung darstellen. In allgemeinen Koordinaten wird analog auf der Mantelfläche

$$t^\alpha = t^3 = 0 \tag{14$_1$}$$

und mit $y^\beta = c_k^\beta\, x^k$ auf den Stirnflächen

$$v_\alpha = -\alpha\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, y^\beta\, x^3, \quad t^3 = 0 \tag{14$_2$}$$

vorgeschrieben. Außerdem ist die Volumenkraft $\bar{p}^\lambda = 0$. Für die in (6) auftretenden Teiloberflächen $\overset{1}{\bar{G}}, \overset{2}{\bar{G}}, \overset{3}{\bar{G}}$ und $\overset{1}{\bar{G}}, \overset{2}{\bar{G}}, \overset{3}{\bar{G}}$ gilt also

$$\overset{1}{\bar{G}} = M, \qquad \overset{2}{\bar{G}} = M, \qquad \overset{3}{\bar{G}} = M + F' + F'',$$

$$\overset{1}{\bar{G}} = F' + F''. \qquad \overset{2}{\bar{G}} = F' + F'', \qquad \overset{3}{\bar{G}} = 0,$$

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 120.

so daß die potentielle Energie für die *de St. Venant*sche Torsion in der Form

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_M\int (t^\alpha - 2\,\bar{t}^\alpha)\,v_\alpha\,df + \frac{1}{2}\int\limits_M\int (t^3 - 2\,\bar{t}^3)\,v_3\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int (t^3 - 2\,\bar{t}^3)\,v_3\,df +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int (t^3 - 2\,\bar{t}^3)\,v_3\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int t^\alpha\,(v_\alpha - 2\,\bar{v}_\alpha)\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int t^\alpha\,(v_\alpha - 2\,\bar{v}_\alpha)\,df -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int (p^\lambda - 2\,\bar{p}^\lambda)\,v_\lambda\,dV \tag{15}$$

angegeben werden kann. Führt man in (15) die Randbedingungen (14) ein, dann erhält man

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_M\int t^\alpha\,v_\alpha\,df + \frac{1}{2}\int\limits_M\int t^3\,v_3\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int t^3\,v_3\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int t^3\,v_3\,df -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int t^\alpha\,(v_\alpha + 2\,\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,x^{3'})\,df - \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int t^\alpha\,(v_\alpha + 2\,\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,x^{3''})\,df +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_R\int\int p^\lambda\,v_\lambda\,dV\,.$$

Wird nun entsprechend (10) der für die reine Torsion zweckmäßige Ansatz

$$\overset{n}{v}_\alpha = -\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,x^3\,, \qquad \overset{n}{v}_3 = \alpha\,\overset{n}{\varphi} = \alpha\sum_{\nu=1}^{n}\overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{\varphi} \tag{16}$$

verwendet, wobei $\overset{\nu}{\varphi} = \overset{\nu}{\varphi}(x^1, x^2)$ Potentialfunktionen sein mögen, dann ergeben sich für die mit (16) gebildeten Elemente des Deformations- und Spannungstensors

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{D}{}^{\alpha\beta} = \overset{n}{D}{}^{33} = 0\,, \qquad & \overset{n}{D}{}^{\alpha 3} = \frac{\alpha}{2}\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\,y_\beta + \overset{n}{\varphi}|^\alpha\right), \\ \overset{n}{\sigma}{}^{\alpha\beta} = \overset{n}{\sigma}{}^{33} = 0\,, \qquad & \overset{n}{\sigma}{}^{\alpha 3} = G\,\alpha\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\,y_\beta + \overset{n}{\varphi}|^\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{17$_1$}$$

und für den Spannungsvektor

$$\overset{n}{t}{}^\alpha = \overset{n}{\sigma}{}^{3\alpha}\,n_3\,, \qquad \overset{n}{t}{}^3 = \overset{n}{\sigma}{}^{\alpha 3}\,n_\alpha\,. \tag{17$_2$}$$

Wegen der vorausgesetzten Potentialfunktionen $\overset{\nu}{\varphi} = \overset{\nu}{\varphi}(x^1, x^2)$ ist $\overset{n}{p}{}^\lambda = 0$. Die in (16) auftretenden Konstanten $\overset{\nu}{c}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) werden so bestimmt, daß die potentielle Energie

$$\overset{n}{\Pi} = \frac{1}{2}\int\limits_M\int \overset{n}{t}{}^\alpha\,\overset{n}{v}_\alpha\,df + \frac{1}{2}\int\limits_M\int \overset{n}{t}{}^3\,\overset{n}{v}_3\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int \overset{n}{t}{}^3\,\overset{n}{v}_3\,df + \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int \overset{n}{t}{}^3\,\overset{n}{v}_3\,df -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{F'}\int \overset{n}{t}{}^\alpha\left(\overset{n}{v}_\alpha + 2\,\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,x^{3'}\right)df - \frac{1}{2}\int\limits_{F''}\int \overset{n}{t}{}^\alpha\left(\overset{n}{v}_\alpha + 2\,\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,x^{3''}\right)df \tag{18}$$

dem Extremwert möglichst nahe kommt. Mit (16), (17), $F = F' = F''$ und $l = x^{3''} - x^{3'}$ erhält man

$$\overset{n}{\Pi} = \frac{\alpha}{2}\oint\limits_C\int\limits_l \overset{n}{\sigma}{}^{\alpha 3}\,n_\alpha\,\overset{n}{\varphi}\,ds\,dx^3 - \frac{\alpha\,l}{2}\int\limits_F\int \overset{n}{\sigma}{}^{3\alpha}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,df = \frac{\alpha\,l}{2}\oint\limits_C G\,\alpha\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\,y_\beta + \overset{n}{\varphi}|^\alpha\right)n_\alpha\,\overset{n}{\varphi}\,ds -$$
$$- \frac{\alpha\,l}{2}\int\limits_F\int G\,\alpha\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\,y_\beta + \overset{n}{\varphi}|^\alpha\right)\varepsilon_{\alpha\gamma}\,y^\gamma\,df.$$

Da $\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta|^\alpha = \varepsilon_{\lambda\beta}\,g^{\alpha\beta}$ verschwindet, folgt daraus

$$\overset{n}{\Pi}\frac{2}{\alpha\,l} = \oint\limits_C G\,\alpha\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\,y_\beta + \overset{n}{\varphi}|^\alpha\right)n_\alpha\,\overset{n}{\varphi}\,ds + \int\limits_F\int G\,\alpha\,y_\beta\,y^\beta\,df - \int\limits_F\int G\,\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\,y^\beta\,\overset{n}{\varphi}\right)|^\alpha\,df.$$

Die Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes auf das letzte Integral ergibt schließlich

$$\overset{n}{\Pi}\frac{2}{\alpha l}=\oint_C G\alpha\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}y_\beta+\overset{n}{\varphi}|^\alpha\right)n_\alpha\overset{n}{\varphi}\,ds+G\alpha\int\!\!\int_F y_\beta y^\beta\,df-\oint_C G\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}y^\beta n^\alpha\overset{n}{\varphi}\,ds$$

$$=-2G\alpha\oint_C\varepsilon_{\alpha\beta}y^\beta n^\alpha\overset{n}{\varphi}\,ds+G\alpha\oint_C\overset{n}{\varphi}|^\alpha n_\alpha\overset{n}{\varphi}\,ds+G\alpha\int\!\!\int_F y_\beta y^\beta\,df.$$

Die Bedingungsgleichungen $\frac{\partial\overset{n}{\Pi}}{\partial\overset{\nu}{c}}=0$ lauten nun

$$-2G\alpha\oint_C\varepsilon_{\alpha\beta}y^\beta n^\alpha\overset{\nu}{\varphi}\,ds+G\alpha\oint_C\left(\overset{\nu}{\varphi}|^\alpha n_\alpha\overset{n}{\varphi}+\overset{n}{\varphi}|^\alpha n_\alpha\overset{\nu}{\varphi}\right)ds=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

und nehmen mit dem *Betti*schen Theorem für die reine Torsion

$$\oint_C\overset{\nu}{\varphi}|_\alpha n^\alpha\overset{n}{\varphi}\,ds=\oint_C\overset{n}{\varphi}|_\alpha n^\alpha\overset{\nu}{\varphi}\,ds$$

die endgültige Form

$$G\alpha\oint_C\left(\overset{n}{\varphi}|_\alpha-\varepsilon_{\alpha\beta}y^\beta\right)n^\alpha\overset{\nu}{\varphi}\,ds=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)\tag{19$_1$}$$

oder

$$\oint_C\overset{n}{\sigma}{}^{\alpha 3}n_\alpha\overset{\nu}{\varphi}\,ds=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)\tag{19$_2$}$$

an.

5. Zusammenfassung. Es wird ein Variationsprinzip der Elastizitätstheorie aufgestellt, das als Sonderfälle das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie und das *Castiglianos*che Prinzip enthält. Da Randbedingungen des Variationsproblems nicht auftreten, können die bei den Verfahren von *Ritz* und *Trefftz* verwendeten Funktionen auf der Oberfläche beliebige Werte annehmen.

(Eingegangen am 16. Mai 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Freiberg (Sachsen), Straße der Einheit 12.